Electromagnetismo
Curso 2008
Examen julio

Problema 1. Una señal de voltaje *triangular* ideal es un voltaje periódico que varía linealmente entre dos valores extremos V_{Max} y V_{Min} (ver figura (*a*)). Para producir un voltaje que se aproxime al comportamiento ideal, se construye el circuito mostrado en la figura (*b*).

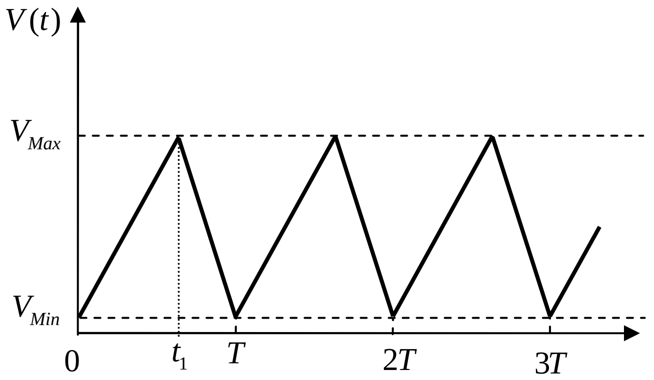

Figura (a)

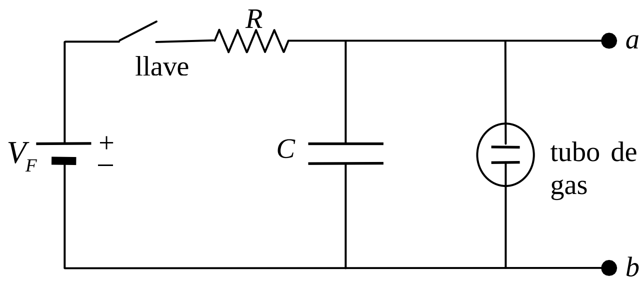

Figura (b)

El circuito contiene una fuente continua V_F, una llave, una resistencia R y un condensador C. La llave se cierra en $t = 0$, estando el condensador cargado con una carga q_0 tal que $q_0 / C = v_0 < V_F$.

En paralelo con el condensador hay un dispositivo consistente en dos placas (ánodo y cátodo) entre las que se encuentra un gas enrarecido (tubo de gas). El gas se comporta de la siguiente forma:

- Mientras la diferencia de potencial $|V_a - V_b|$ es menor que un valor crítico $V_C > v_0$, el gas no se ioniza, por lo que no permite la conducción a través del tubo.
- Cuando la diferencia de potencial $|V_a - V_b|$ supera el valor crítico V_C, el gas se ioniza y el tubo se comporta como una resistencia de valor r ($r << R$). En este estado, el condensador comienza a descargarse rápidamente.
- El gas se mantiene como conductor hasta que la diferencia $|V_a - V_b|$ disminuye al valor v_0 ($v_0 < V_C$).

a) Asumiendo primeramente que el tubo de gas no está presente, determine la diferencia de potencial $V(t) = V_a - V_b$ en función del tiempo, a partir de $t = 0$. Halle el instante T_1 en el que $V(T_1) = V_C$.

b) A continuación considere que el tubo de gas está presente. Halle $V(t)$ para todo $t > T_1$. Represente gráficamente $V(t)$. Suponga conocidos los valores v_0, V_F y V_C ($V_C < V_F$) considerando que $r < \left(\frac{v_0}{V_F}\right)R$.

c) Halle el período T de oscilación del circuito. ¿Qué valores de los parámetros del gas, V_C, r y v_0, harían que $V(t)$ se asemeje a la señal triangular de la figura (a)?

Problema2. El circuito de la figura (c) tiene un núcleo magnético saturable, cuya curva de saturación se adjunta en la figura (d). El núcleo tiene una sección transversal uniforme *S*. Las ramas laterales tienen largo medio *3l*, y la central *l*. En torno a la rama central se arrollan dos bobinados tal como se muestra en la figura. Al primer bobinado, con N_1 vueltas, se le aplica una tensión alterna cuya representación compleja es $V_1 e^{j\omega t}$ (siendo V_1 real y positivo). El segundo bobinado, de N_2 vueltas, se conecta a un capacitor de capacidad *C*. El circuito se encuentra funcionando en *régimen permanente*.

a) (i) Sea $\Phi_C e^{j\omega t}$ la representación compleja del flujo magnético por la rama central. Demuestre que $j\omega N_1 \Phi_C = V_1$.
(ii) Determine el menor valor de N_1 para que el núcleo se comporte como un medio magnético lineal.

b) (i) Halle la relación entre las amplitudes complejas de la tensión en cada bobinado (V_1 y V_2).
(ii) Halle la expresión para la carga en el capacitor.

c) Determine las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ en las bobinas.

d) Halle la potencia media entregada por la fuente

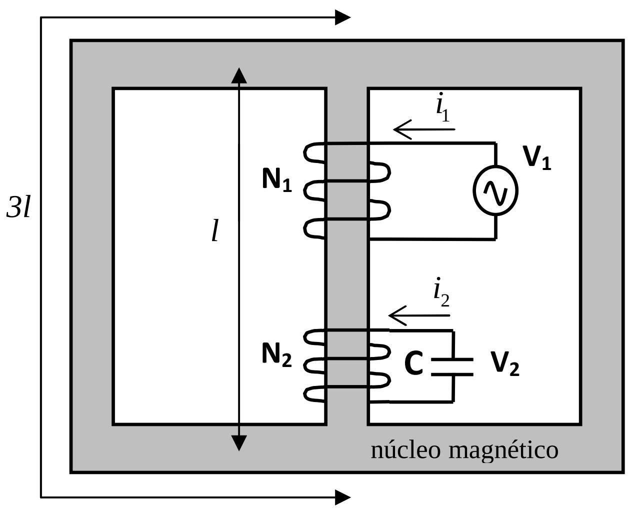

Figura (c)

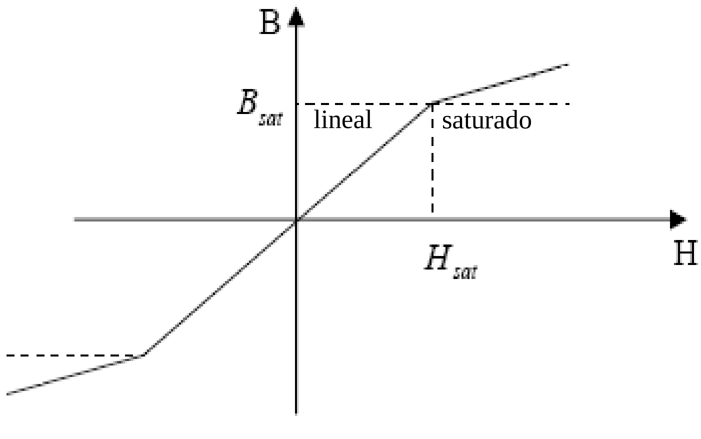

Figura (d)

Problema 3. Un cascarón esférico hueco, conductor, de centro *C* y radio *b*, está conectado a tierra. En su interior se encuentra una esfera conductora de radio *a* y con *carga q*, cuyo centro, *O*, está ligeramente desplazado de *C* una distancia $\delta << a$. El espacio entre la esfera y el cascarón está vacío.

a) Para el caso $\delta = 0$ (esfera y cascarón concéntricos) determine el potencial $\phi(r,\theta)$ en la región entre el cascarón y la esfera, tomando el punto *O* como origen del sistema de coordenadas.

b) Considere $\delta \neq 0$, con $\delta << a$. Un punto arbitrario en el cascarón *P*, situado a un ángulo θ, está a una distancia R_{OP} del origen *O* (ver figura (e)). Demuestre que la distancia se puede expresar en forma aproximada como $R_{OP}(\theta) \cong b + \delta\cos\theta$, despreciando los términos proporcionales a δ^n, con $n \geq 2$ (aproximación de primer orden en δ).

c) Se sabe que el potencial en la región entre el cascarón y la esfera, calculado a primer orden en δ, es de la forma

$$\phi(r,\theta) = \left(A_0 + \frac{B_0}{r}\right) + \delta\left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right)\cos\theta,$$

siendo el punto O el centro del sistema de coordenadas esféricas.
Escriba las condiciones de frontera para ϕ y determine las constantes A_0, B_0, A_1 y B_1.
Por consistencia los términos de orden δ^n *con* $n \geq 2$ *deben despreciarse.*

d) Halle, en las condiciones de la parte (b), la densidad de carga en los puntos de la superficie de la esfera interior. Verifique que si $\delta \to 0$, entonces $\sigma_a(\theta) \to \dfrac{q}{4\pi a^2}$.

Se recuerda que $(1+x)^n = 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2 + \ldots + \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}x^m + \ldots$

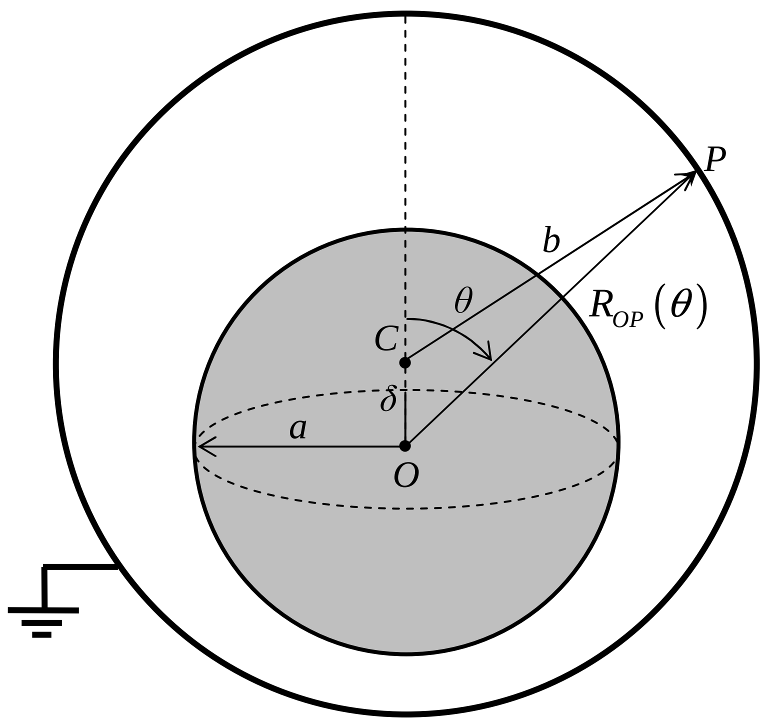

Figura (e)