

## Electromagnetismo Curso 2007 Examen julio

**Problema 1.** Considere dos placas conductoras cuadradas de lado  $L$ , separadas una distancia  $d$  por dos materiales dieléctricos con permitividad  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  respectivamente. Como muestra la figura 1.

a) Halle la capacidad  $C$  del sistema.

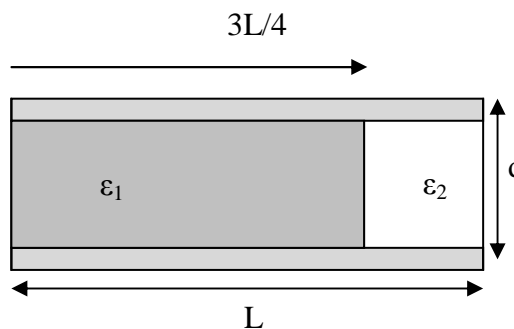


Figura 1

Se implementa el circuito de la figura 2, utilizando el capacitor de la parte a y una resistencia  $R$ . La fuente se especificará en las diferentes partes.

- b) En esta parte la fuente es continua, esto es  $V(t) = V_0$ . Determine la diferencia de potencial  $v_c(t)$  entre los bornes del capacitor a partir del instante  $t = 0$  cuando se cierra la llave  $S$  (suponga que para  $t < 0$  el capacitor se encuentra descargado).
- c) En esta parte la fuente es alterna, esto es  $V(t) = V_1 \cos(\omega t)$ . Determine el voltaje en bornes del capacitor en régimen. Estime el tiempo necesario para alcanzar el estado de régimen a partir del momento en que se cierra la llave ( $t = 0$ ).

Se colocan las dos fuentes simultáneamente, esto es  $V(t) = V_0 + V_1 \cos(\omega t)$ .

- d) Determine el voltaje  $v_c$  entre los bornes del condensador para el circuito en régimen.
- e) Halle la densidad de carga promediada en el tiempo en las diferentes partes de la placa inferior en estado de régimen.

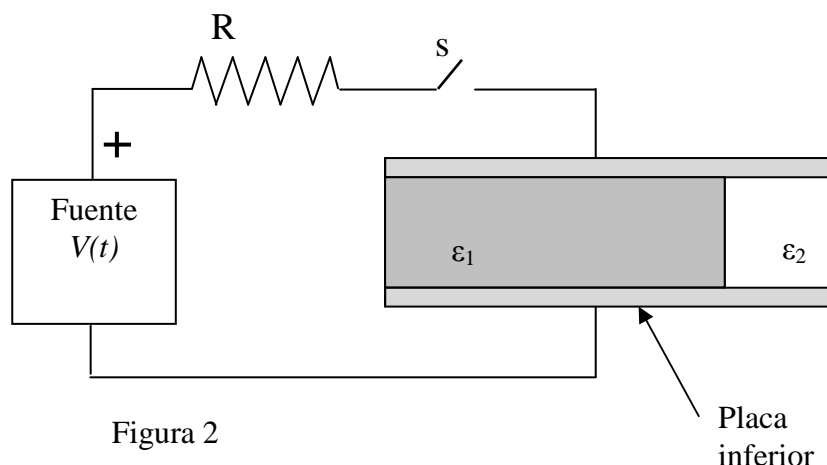


Figura 2

**Problema 2.**

La figura muestra un dispositivo en el que una partícula de carga  $q$  y de masa  $m$  es **acelerada** entre dos placas paralelas que están conectadas a una fuente de potencial  $V(t)$  y separadas una distancia  $d$ . La partícula se mueve en el plano de la figura y puede traspasar sin dificultad cada placa a través de orificios no mostrados en el diagrama.

Fuera de la región entre las placas, se establece una inducción magnética  $\mathbf{B}$  uniforme (ver figura). Este campo hace que la partícula reingrese a la región entre las placas.

Consideremos  $V(t) = V_0 = \text{cte.}$  con  $V_0 > 0$ . En el instante mostrado en la figura ( $t = 0$ ) la partícula de carga  $q > 0$  se mueve hacia la derecha con velocidad  $u_0$ .

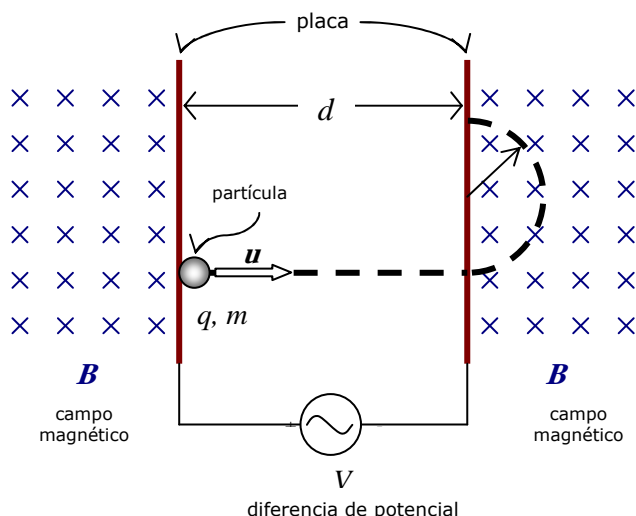
**a)** Calcule:

- la velocidad  $u_1$  con la que la partícula sale de la región entre las placas,
- el radio  $r$  de la trayectoria en la región de campo magnético,
- y el tiempo que la partícula tarda en pasar por la región magnética. ¿Cómo depende este tiempo de la velocidad  $u_1$ ?

Ahora consideremos que la diferencia de potencial se establece a  $V(t) = V_0 \cos(2\pi f t)$ , tomando como  $t = 0$  el momento mostrado en la figura. La partícula se mueve de una región de campo magnético a otra, cruzando el espacio entre las placas. Admita que el tiempo que tarda la partícula en cruzar este espacio es siempre despreciable en relación al tiempo que la partícula permanece en las regiones de campo magnético.

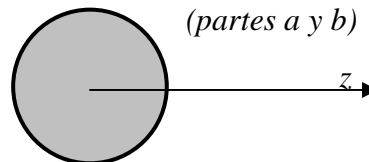
**b)** Se desea ajustar la frecuencia  $f$  para que la partícula aumente su energía cinética en cada pasaje por la región entre las placas. Encuentre cuál es el mínimo valor de la frecuencia  $f$  que hace esto posible. Justifique.

**c)** La trayectoria de la partícula puede tener un radio máximo  $r = r_{\text{max}}$ ; si este radio es superado, la partícula abandona el dispositivo. Calcule cuál es la energía máxima que puede adquirir la partícula con este dispositivo.



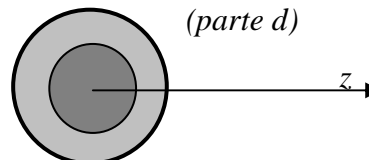
**Problema 3.** Considere una esfera maciza de radio  $a$  centrada en el origen de coordenadas. La esfera está formada por un material magnético con magnetización uniforme  $\mathbf{M} = M \hat{\mathbf{k}}$  ( $\hat{\mathbf{k}}$  es el vector unitario en la dirección del eje  $z$ ).

- a) Muestre que el campo magnético producido por la esfera satisface  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$  y  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$  tanto dentro como fuera de la esfera.
- b) Halle las densidades (superficial y volumétrica) de carga magnética asociadas a esta magnetización.
- c) Halle los campos magnéticos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  en todo el espacio.



Suponga en adelante que la esfera tiene un núcleo esférico de radio  $a/2$  (centrado en el origen) donde la magnetización es  $\mathbf{M} = -M \hat{\mathbf{k}}$ . (ver figura).

- d) Halle en este caso los campos magnéticos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  en todos los puntos del eje  $z$ .



### Fórmulas de apoyo.

Solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas polares para un sistema con simetría de revolución en torno al eje z:

$$\varphi(r, \theta) = A_0 + C_0 r^{-1} + (A_1 r + C_1 r^{-2}) \cos \theta + (A_2 r^2 + C_2 r^{-3}) \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots$$

$$\dots + (A_n r^n + C_n r^{-1-n}) P_n(\cos \theta) + \dots$$

donde los  $A_n$  y  $C_n$  son constantes a determinar y  $P_n(x)$  es el polinomio de Legendre de grado  $n$ .

### Operadores Diferenciales

	<u>Cartesianas</u>	<u>Cilíndricas</u>	<u>Esféricas</u>
$grad \psi = \nabla \psi$	$\frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{k}$	$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$
$div A = \nabla \cdot A$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
$rot A = \nabla \times A$	$\left[ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \hat{i} + \left[ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \hat{j} + \left[ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \hat{k}$	$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{\varphi} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{k}$	$\frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{r} + \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\varphi}$
$Lapl \psi = \nabla^2 \psi = div(grad \psi)$	$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}$