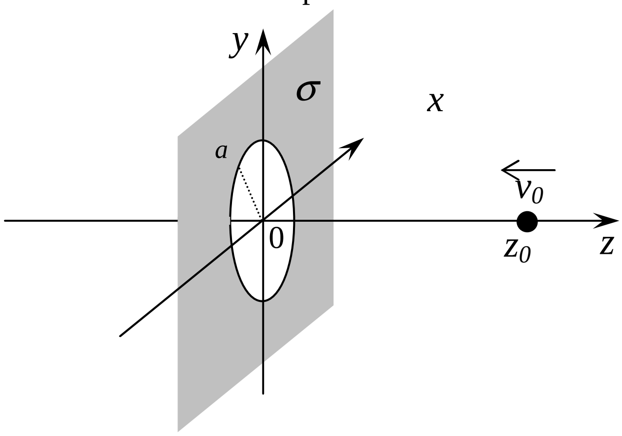
Electromagnetismo
Curso 2007
Examen febrero

Problema 1. Considere una placa delgada uniforme infinita que ocupa todo el plano $z = 0$ excepto en un orificio circular de radio a centrado en el origen de coordenadas (ver figura). La placa está compuesta de un material no conductor y tiene una densidad superficial de carga uniforme σ. El medio que rodea a la placa por ambos lados es el vacío.

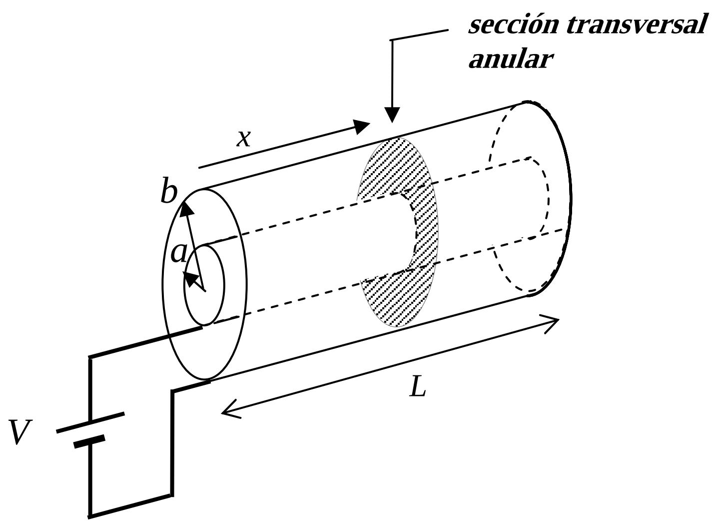
a) Halle el vector campo eléctrico sobre todos los puntos del eje z.

Una partícula de carga q y masa m se aproxima de la placa a lo largo del eje z. Inicialmente la partícula tiene una velocidad $\mathbf{v} = -v_0\hat{k}$ ($v_0 > 0$) y se encuentra en la posición $z = z_0$ ($z_0 > 0$).

b) Discuta según el signo de q qué condición debe cumplir v_0 para que la partícula no pase de un lado al otro de la placa a través del orificio.



Problema 2. Considere dos conductores ideales cilíndricos y coaxiales de largo L como muestra la figura. El radio exterior del conductor interno es a y el radio interior del conductor externo es b. El espacio entre ambos conductores está lleno de un material homogéneo lineal de conductividad g, permitividad ε y permeabilidad magnética μ.. Entre ambos conductores está conectada una batería de voltaje V y el sistema se encuentra en régimen estacionario.



a) Determine el campo eléctrico $\vec{E}$ en la región *a<r<b*. Desprecie los efectos de borde.
b) Halle la resistencia eléctrica total R_L del dispositivo y la resistencia *R(x)* correspondiente a un tramo de largo *x*.
c) Halle la corriente *I(x)* que circula por el conductor interno.
d) Halle el campo magnético en la región *a<r<b* (*suponga que es perpendicular a la dirección del eje del cilindro*).
e) Calcule el *vector de Poynting* $\vec{S}$ para *a<r<b* (*r* es la distancia al eje de los cilindros).
f) Halle la *potencia a electromagnética total P* que atraviesa la sección transversal anular *a<r<b* situada a una distancia *x* del extremo del dispositivo conectado a la batería (ver figura).

Problema 3

a) Suponga un medio *no conductor*, lineal, isotrópico y homogéneo, de forma que $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ con ε y μ constantes. Consideraremos que no hay cargas libres en la sustancia.

Una onda plana electromagnética (monocromática) consiste en campos[1]

$$\mathbf{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad \mathbf{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

siendo $\vec{E}_0$ y $\vec{B}_0$ vectores (complejos) constantes.

Los campos verifican las ecuaciones de Maxwell y consecuentemente también la ecuación de onda ($\nabla^2\mathbf{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0; \nabla^2\mathbf{B} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$).

i.- A partir de las ecuaciones de Maxwell deduzca que $\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$, $\vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0$ y $\vec{E}_0\cdot\vec{B}_0 = 0$.

ii.- Determine la velocidad de fase $v = \omega / k$ en términos de ε y μ.

iii.- Halle la relación entre $\left|\vec{E}_0\right|$ y $\left|\vec{B}_0\right|$.

b) Suponga que el plano *xy* separa los medios lineales 1 y 2 caracterizados por permitividades eléctricas ε_1 y ε_2 y permeabilidades magnéticas $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Una onda planade frecuencia ω, viajando en la dirección *z*, llega a la interfase desde el medio 1:

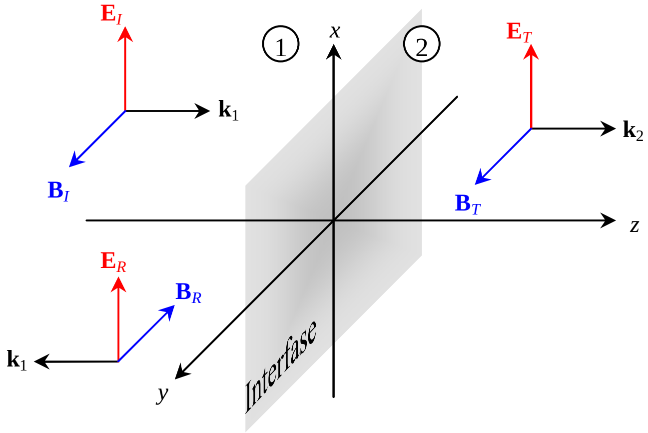
$$\begin{cases} \mathbf{E}_I(z,t) = \vec{E}_{0\mathrm{I}}\, \mathrm{e}^{i(k_1 z - \omega t)} \\ \mathbf{B}_I(z,t) = \vec{B}_{0I}\, \mathrm{e}^{i(k_1 z - \omega t)} \end{cases} \qquad (z < 0),$$

con $\vec{E}_{0I} = E_{0I}\hat{x}$ y $\vec{B}_{0I} = B_{0I}\hat{y}$.

Esto da lugar a una onda reflejada ($\mathbf{E}_R$,$\mathbf{B}_R$) que regresa por el medio 1 y una onda transmitida ($\mathbf{E}_T$,$\mathbf{B}_T$) que continúa avanzando en el medio 2 como se muestra la figura:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_R(z,t) = \vec{E}_{0R}\, e^{-i(k_1 z + \omega t)} \\ \mathbf{B}_R(z,t) = \vec{B}_{0R}\, e^{-i(k_1 z + \omega t)} \end{cases} (z<0); \qquad \begin{cases} \mathbf{E}_T(z,t) = \vec{E}_{0T}\, e^{i(k_2 z - \omega t)} \\ \mathbf{B}_T(z,t) = \vec{B}_{0T}\, e^{i(k_2 z - \omega t)} \end{cases} (z>0).$$

[1] Se sobreentiende que los campos físicos corresponden a la parte real de los campos complejos dados.



(i) Escriba las condiciones de borde para los campos en el plano $z = 0$ (no hay cargas ni corrientes libres).

(ii) Determine las amplitudes complejas E_{0R} y E_{0T} en función de E_{0I} y las constantes de los materiales. *Preste atención al sentido de los campos (ver figura).*

(iii) Calcule los coeficientes de transmisión $T \equiv I_T / I_I$ y reflexión $R \equiv I_R / I_I$, siendo I_T, I_R las intensidades correspondientes e I_I la intensidad incidente. Exprese los resultados en función de ε_1 y ε_2.

FÓRMULAS DE APOYO

Si el campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$ se puede escribir como $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)=\mathbf{F}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$, con $\mathbf{F}_0$, $\mathbf{k}$ y ω constantes, entonces se cumple

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=i\mathbf{k}\cdot\mathbf{F}$$

$$\nabla\times\mathbf{F}=i\mathbf{k}\times\mathbf{F}$$

$$\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}=-i\omega\mathbf{F}$$

OPERADORES DIFERENCIALES

	Cartesianas	***Cilíndricas***	***Esféricas***
$grad\,\psi=\nabla\psi$	$\frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{k}$	$\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\hat{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial\psi}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$
$div\,A=\nabla\cdot A$	$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial(sen\theta A_\theta)}{\partial\theta}+$ $+\frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$
$rot\,A=\nabla\times A$	$\left[\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\hat{i}+$ $+\left[\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\hat{j}+$ $+\left[\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\hat{k}$	$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\hat{\rho}+$ $+\left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right]\hat{\varphi}+$ $+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right]\hat{k}$	$\frac{1}{r\,sen\theta}\left[\frac{\partial(sen\theta\,A_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{r}+$ $+\left[\frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\hat{\theta}+$ $+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\varphi}$
$Lapl\,\psi=\nabla^2\psi=$ $=div\,(grad\,\psi)$	$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right]+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2\,sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[sen\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right]+$ $+\frac{1}{r^2\,sen^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$