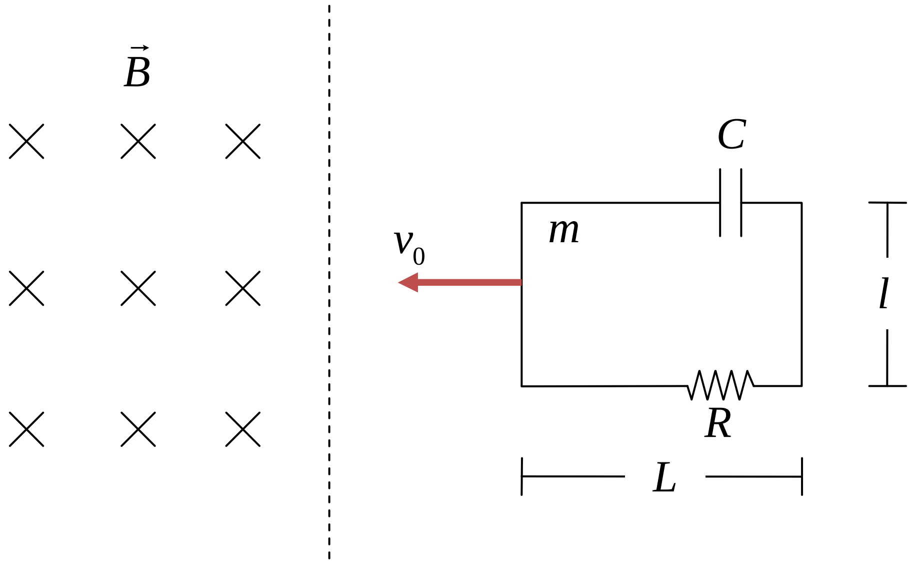
# Electromagnetismo
# Curso 2008
# Examen diciembre

## Problema 1




En la región del espacio correspondiente a $x > 0$ existe un campo magnético uniforme de módulo $B$, perpendicular al plano de la figura y en sentido entrante. Una espira plana, rectangular de dimensiones $L \times l$ y masa $m$ se desplaza inicialmente con velocidad $v_0$ en la dirección del eje $x$ penetrando en la zona de campo magnético. Sea $t = 0$ el instante en que el extremo de la espira ingresa en la región de campo magnético. La espira tiene una resistencia R y un condensador de capacitancia $C$, cuya carga en $t = 0$ es nula.
Suponga que el largo $L$ de la espira es muy grande, como para que ésta no penetre nunca totalmente dentro de la región de campo magnético.

a) Halle la relación entre la carga del condensador y la velocidad $v$ de la espira para $t > 0$ en función de $v_0$ y los demás parámetros. *Sugerencia: escribir la ecuación de movimiento para la espira.*
b) Calcule la velocidad $v(t)$ de la espira a partir de su ingreso en el campo magnético.
c) ¿Cuál es la carga del condensador, mucho después del ingreso de la espira al campo magnético?
d) Calcule la energía que se disipa en la resistencia entre el momento del ingreso de la espira en la región de campo y un tiempo $t$ muy largo.

**Problema 2**. Considere una onda plana electromagnética monocromática de la forma

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)},$$
$$\vec{D}(\vec{r},t) = \vec{D}_0 e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)},$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)},$$
$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}$$

a) Utilizando las ecuaciones de Maxwell establezca las relaciones que deben cumplir los vectores $\vec{k}, \vec{E}_0, \vec{D}_0, \vec{B}_0, \vec{H}_0$. *Sugerencia: para ondas planas monocromáticas son válidos los reemplazos* $\nabla \to i\vec{k}$, $\partial/\partial t \to -i\omega$.

En cierto material lineal *anisotrópico* las relaciones constitutivas entre los campos están dadas por $\vec{B} = \mu\vec{H}$, donde μ es un escalar y $\vec{E} = \eta\vec{D}$, donde $\eta$ es un tensor. En coordenadas cartesianas el tensor $\eta$ puede ser representado por una matriz de tal modo que

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix}.$$

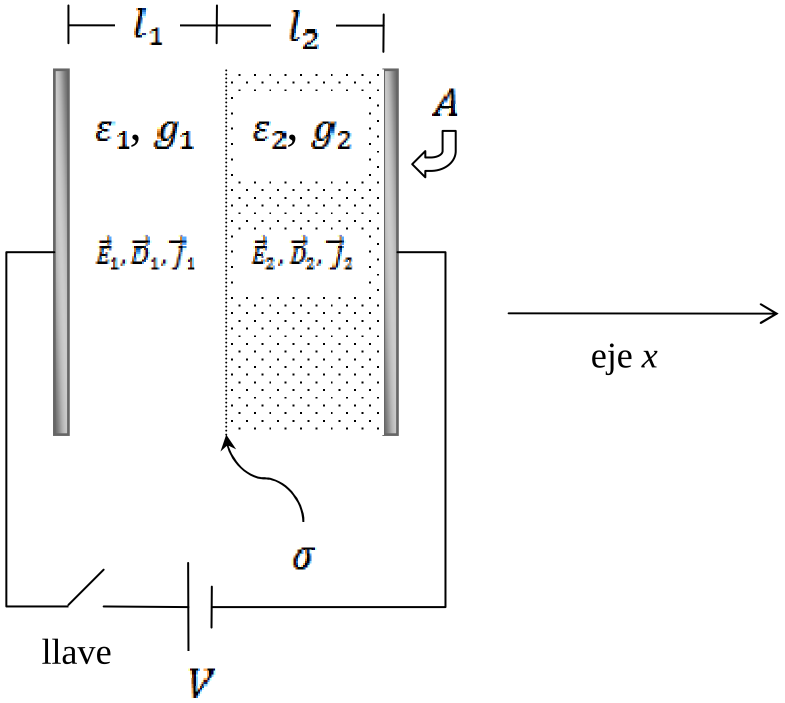
Suponga que en este medio se propaga una onda electromagnética plana monocromática con un vector de onda $\vec{k} = k\hat{z}$, donde $\hat{z}$ es el vector unitario correspondiente al eje *z*. En dicha onda el vector inducción magnética está dado por

$$\vec{B}(z,t) = \vec{B}_0 e^{i(kz-\omega t)} = B_0 \hat{x} e^{i(kz-\omega t)}$$

donde $\hat{x}$ es el vector unitario en la dirección del eje *x*.

b) Halle la amplitud y dirección de los vectores $\vec{D}_0$ y $\vec{H}_0$. Exprese los resultados en función de $B_0$.
c) Determine el vector $\vec{E}_0$.
d) Haga un bosquejo de la orientación respectiva de los campos $\vec{k}, \vec{E}_0, \vec{D}_0, \vec{B}_0, \vec{H}_0$ en relación a los ejes de coordenadas (Suponga $B_0$ real).
e) Halle el valor medio $\bar{u}$ de la densidad de energía electromagnética (promediada en un período de oscilación). *Recuerde que* $\overline{\mathrm{Re}(Ae^{i\omega t})\,\mathrm{Re}(Be^{i\omega t})} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(AB^*)$, *donde la barra superior significa promedio temporal en un período de oscilación*.
f) Determine el módulo y la dirección del valor medio del vector de Poynting $\vec{S}$.
g) ¿Qué ángulo forman la dirección de propagación de la energía electromagnética y la dirección de propagación de la onda?

**Problema 3**




Dos capas de materiales lineales, isotrópicos y óhmicos, de permitividad eléctrica $\varepsilon_1$ y $\varepsilon_2$, conductividad $g_1$ y $g_2$ y espesor $l_1$ y $l_2$ respectivamente, llenan el espacio dentro de un condensador de placas paralelas de área A, como se muestra en la figura. El condensador está, a su vez, conectado a una batería de diferencia de potencial $V$ (cte.) mediante una llave. Inicialmente el sistema está completamente descargado. En $t = 0$ se cierra la llave.
Llamaremos $\vec{E}_1$ al campo eléctrico, $\vec{D}_1$ al desplazamiento eléctrico y $\vec{J}_1$ a la densidad de corriente en el material de la izquierda, y $\vec{E}_2$, $\vec{D}_2$ y $\vec{J}_2$ a los correspondientes en el material de la derecha. Consideraremos el sentido positivo del eje *x* de izquierda a derecha, como se muestra. Denominamos $\sigma$ a la densidad de carga eléctrica (libre) en la superficie que separa los materiales. Los efectos de borde son despreciables.
En el estado estacionario:

a) Escriba las condiciones de borde para los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ y para las densidad de corriente $\vec{J}_1$ y $\vec{J}_2$ en el plano que separa los materiales cuando el sistema se halla en el estado estacionario.
b) Determine los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ y la densidad de carga $\sigma$ en términos de $V$.
c) Halle la resistencia total R del dispositivo

Considere ahora el régimen transitorio a partir del momento en que se cierra la llave (t=0)

d) Utilice la *conservación de la carga*, relacione $\vec{J}_1$, $\vec{J}_2$ y la variación de $\sigma$(t) en la superficie que separa los materiales.
e) Utilizando las ecuaciones de borde para los campos, halle la ecuación diferencial que debe satisfacer $\sigma(t)$.
f) Halle y bosqueje $\sigma(t)$, en términos de $V$ y los demás parámetros del sistema.