Electromagnetismo
Curso 2007
Examen diciembre

Problema 1. Una pequeña esfera conductora se encuentra en la posición ($x=0$, $y=0$, $z=d$) frente a un plano conductor infinito situado en el plano ($z=0$). La esfera tiene un radio despreciable a siendo $a << d$ y contiene en un cierto instante t_0 una carga eléctrica q_0. El medio que rodea la esfera tiene una permitividad dieléctrica ε.

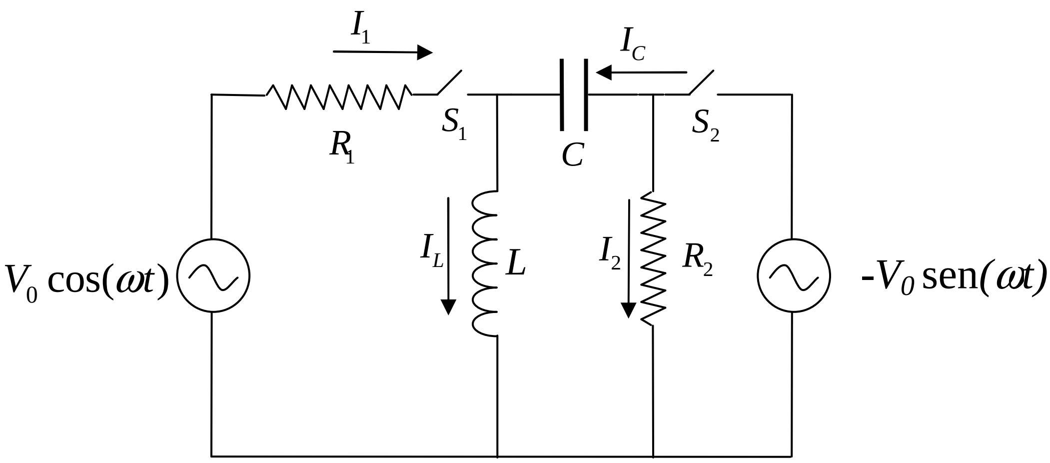
a) Halle el potencial eléctrico y el campo eléctrico en todo el espacio (excepto muy cerca de la esfera cargada) para $t = t_0$ suponiendo que el potencial del plano conductor es cero. *Se sugiere utilizar coordenadas cartesianas.*
b) Halle la densidad de carga (libre) superficial σ en el plano conductor.

El medio que rodea a la esfera tiene una conductividad uniforme g (que es muy pequeña en comparación con las conductividades del plano y de la esferita).

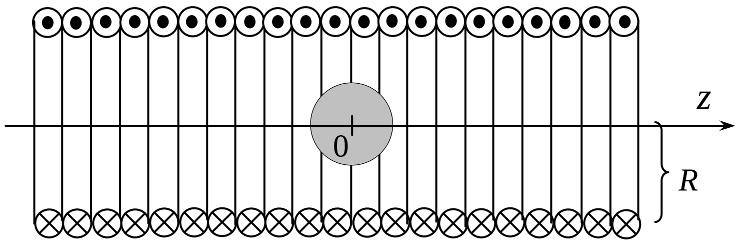
c) Calcule la corriente total entre la esfera y el plano conductor en $t = t_0$.
d) ¿En cuanto tiempo la esfera pierde la mitad de su carga?

Problema 2. Considere el circuito de la figura funcionando en régimen con las llaves S_1 y S_2 cerradas.

a) Exprese en forma compleja los voltajes de las fuentes.
b) Determine la frecuencia angular ω de trabajo sabiendo que la caída de tensión en la bobina es nula.
c) Para la frecuencia hallada en b), determine las expresiones temporales de la corriente I_C por el capacitor y la carga Q en éste.
d) En $t=0$, se abren las llaves S_1 y S_2, determine la corriente por la bobina para $t > 0$.



a) **Problema 3.** Considere un solenoide dentro del cual se genera un campo magnético constante B_0. El eje de simetría del solenoide es el eje z y su centro el origen de coordenadas. Se coloca una pequeña esfera de radio a ($a<<R$) de un material paramagnético aislante y sin cargas con permeabilidad μ en el centro del solenoide (ver figura)



a) Demuestre a partir de las ecuaciones de Maxwell que el campo H verifica: $H = -\nabla \varphi^*$ en todo el volumen interior al solenoide (dentro y fuera de la esfera) y que el potencial φ^* satisface la ecuación de Laplace: $\nabla^2 \varphi^* = 0$.

Sean φ_1^* y φ_2^* las funciones correspondientes al potencial escalar φ^* dentro y fuera de la esfera respectivamente.

b) Plantee las condiciones que deben satisfacer dichas funciones en la superficie de la esfera.

c) Determine explícitamente los campos magnéticos B_1 y B_2 dentro y fuera de la esfera respectivamente. *Limítese al espacio dentro del solenoide lejos del bobinado y de los extremos.*

d) Halle las densidades volumétricas y superficiales de carga magnética correspondientes a la magnetización de la esfera.

Fórmulas de apoyo.

Solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas polares para un sistema con simetría de revolución en torno al eje z:

$$\varphi(r,\theta) = A_0 + C_0 r^{-1} + \left(A_1 r + C_1 r^{-2}\right)\cos\theta + \left(A_2 r^2 + C_2 r^{-3}\right)\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left(A_n r^n + C_n r^{-1-n}\right) P_n(\cos\theta) + \cdots$$

donde los A_n y C_n son constantes a determinar y $P_n(x)$ es el polinomio de Legendre de grado n.

OPERADORES DIFERENCIALES

	Cartesianas	***Cilíndricas***	***Esféricas***
$grad\,\psi = \nabla\psi$	$\frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{k}$	$\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial\psi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$
$div\,A = \nabla\cdot A$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial(sen\theta A_\theta)}{\partial\theta} +$ $+ \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$
$rot\,A = \nabla\times A$	$\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\hat{i} +$ $+\left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\hat{j} +$ $+\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\hat{k}$	$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\hat{\rho} +$ $+\left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right]\hat{\varphi} +$ $+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right]\hat{k}$	$\frac{1}{r\,sen\theta}\left[\frac{\partial(sen\theta\,A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{r} +$ $+\left[\frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r}\right]\hat{\theta} +$ $+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\varphi}$
$Lapl\,\psi = \nabla^2\psi =$ $= div\,(grad\,\psi)$	$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2\,sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[sen\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right] +$ $+\frac{1}{r^2\,sen^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$