Electromagnetismo - Curso 2008 - Primer parcial

Errores Frecuentes y Observaciones

Problema 1 [20 Pts.] Considere una esfera maciza de radio *a* centrada en el origen de coordenadas. La esfera está compuesta por un material aislante que no tiene carga eléctrica neta y posee una polarización *uniforme* $\vec{P} = P_0\hat{k}$ donde $\hat{k}$ es el vector unitario en la dirección del eje *z*. El espacio exterior a la esfera está vacío y no se aplica ningún campo externo. Utilice para este problema coordenadas polares (r, θ, ϕ).

a) Escriba la relación entre los vectores $\vec{D}$, $\vec{E}$ (campo eléctrico) y $\vec{P}$ dentro y fuera de la esfera. [2 Pts.]

- El material de la esfera es **no lineal**, la polarización de hecho es *independiente* del campo aplicado. No tiene sentido definir una constante dieléctrica en este caso. Las relaciones $\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$ o $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ no son aplicables.

- El hecho de que no hay carga libre en esta situación no implica que el campo $\mathbf{D}$ sea cero. A esta conclusión se llega incorrectamente por aplicación de la ley de Gauss $\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q_L = 0$. La igualdad es válida para cualquier superficie cerrada *S*, pero eso **no implica** que el integrando se anule en todos los puntos (lo que es cierto es que la divergencia de $\mathbf{D}$ es cero, $\nabla\cdot\mathbf{D} = 0$).

b) Halle las densidades de carga de polarización volumétrica ρ_P y superficial σ_P. [3 Pts.]

- *La densidad de carga de polarización se obtiene calculando $\rho_P = -\nabla\cdot\mathbf{P} = 0$: como la polarización es uniforme, es inmediato concluir que su divergencia es nula. No es preciso desarrollar la divergencia de un campo genérico y después calcularla para la polarización dada.*

c) Sean $\varphi_1(\vec{r})$ y $\varphi_2(\vec{r})$ el potencial eléctrico dentro y fuera de la esfera respectivamente. ¿Qué condiciones deben cumplir estas funciones (o sus derivadas) en la superficie de la esfera ($r = a$)? [5 Pts.]

- *Hay varias condiciones que el potencial cumple en la superficie, pero se necesitan al menos dos condiciones independientes para poder más adelante resolver el potencial completo. En una de ellas debe intervenir la densidad de carga hallada previamente, teniendo en cuenta que el material es no lineal, p. ej.* $E_{2n} - E_{1n} = \sigma_P = P_0\cos\theta$ *con* $E_{i,n} = -\partial\varphi_i/\partial r\big|_{r=a}$.

d) Halle el potencial eléctrico en todos los puntos (dentro y fuera de la esfera) admitiendo que el potencial se anula en el infinito. [6 Pts.]

- *No hay que confundir la polarización* $\mathbf{P}$ *con un dipolo* $\mathbf{p}$*. El potencial en el interior de la esfera debe ser siempre acotado, y considerando los valores de* $r \to 0$*, se sabe que no puede tener un término correspondiente a un campo dipolar (ni monopolar, etc.)*

- *Por otro lado, el potencial fuera de la esfera recibe una contribución del tipo* $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/r^3$*, siendo* $\mathbf{p}$ *el momento dipolar.*

  Está relacionado con la polarización por "<polarización> = <mom. dipolar> / <unidad de volumen>"y vale en este caso $\mathbf{p} = V_{esf}\mathbf{P} = \frac{4\pi}{3}a^3 P_0 \hat{\mathbf{k}}$ *(polariz. unif.).*

e) Halle el campo eléctrico en el interior de la esfera. Exprese el resultado en la base cartesiana. [4 Pts.]

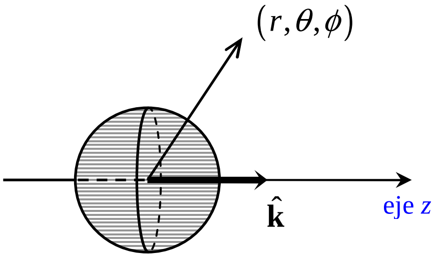

Figura 1

Problema 2 [20 Pts.] Se disponen los condensadores idénticos *A* y *B* de placas paralelas conectados ambos a una fuente de potencial V_0 como se muestra en la figura. Las placas de los condensadores son cuadradas de lado l y están separadas por una distancia d. El condensador *B* puede desconectarse gracias a los interruptores.

Entre los condensadores se coloca un bloque dieléctrico de espesor d y masa m, llenando parte del espacio entre las placas (ver Figura 2): el condensador A queda **vacío** hasta una profundidad *x*, mientras que el B queda **lleno** hasta *x*. El dieléctrico es lineal con constante $\varepsilon = 1.2\varepsilon_0$. En este problema se desprecian efectos de borde.

Inicialmente los interruptores están cerrados.

a) Encuentre la capacidad de cada condensador y la capacidad equivalente del sistema. [2 Pts.]

- *Encontrar el valor de la capacidad de un condensador de placas paralelas tiene aproximadamente el mismo nivel de dificultad que demostrar la relación para la capacidad equivalente de un sistema de condensadores en paralelo. No tiene sentido demostrar la primera y la segunda no (más aún, no hace falta demostrar ninguna)*

b) Determine la energía almacenada en cada condensador y en el sistema total en función de la posición *x* del bloque dieléctrico. [3 Pts.]

c) Calcule las fuerzas sobre el bloque dieléctrico debidas a los condensadores *A* y *B* (indique claramente las direcciones). ¿Cuánto vale la fuerza neta? [3 Pts.]

En un cierto instante, cuando el dieléctrico se encuentra en la posición $x = x_0$ se abren los interruptores *simultáneamente*.

d) Calcule nuevamente las fuerzas sobre el bloque dieléctrico debidas a los condensadores *A* y *B*. [7 Pts.]

- *Cuando el condensador B se desconecta su carga permanece constante pero la diferencia de potencial entre sus placas depende de la posición del dieléctrico. Así mismo, la densidad de carga puede cambiar si el dieléctrico cambia de posición.*

- *Hay que tener cuidado al calcular las fuerzas eléctricas usando* $F_x = -(\partial U / \partial x)_Q$ *de considerar los posibles cambios en la diferencia de potencial entre las placas.*

- *Al desconectar B, lo que cambia es la relación entre la fuerza y la energía, pasando de* $F_x = +(\partial U / \partial x)_V$ *a* $F_x = -(\partial U / \partial x)_Q$. *Pero eso no significa que la fuerza hecha por el condensador necesariamente invierta su sentido; de hecho la fuerza es exactamente igual si* $x = x_0$.

e) El bloque es situado por un agente externo en la posición $x = x_0 + \Delta x$. Encuentre la *fuerza total* y discuta su sentido según el signo de Δx (se supondrá que el bloque siempre tiene una parte en cada conductor, es decir, $0 < x < l$). Describa cualitativamente el movimiento subsiguiente del bloque. [5 Pts.]

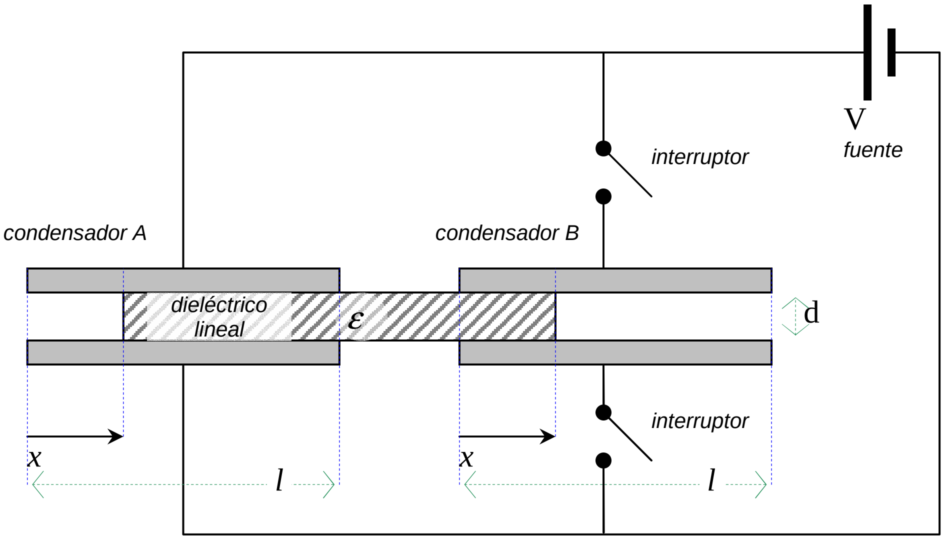

Figura 2