1. Ejercicio

1. El potencial eléctrico de una línea de carga infinita con densidad de carga λ es:
   $\phi = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} Ln(r)$
   donde r es la distancia entre el punto de interés y la linea de carga. Para el caso de tener dos líneas de carga de densidades opuestas y separados una distancia $2d$ por superposición tendremos: $\phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} Ln(\frac{r_-}{r_+})$
   Con $r_+ = \sqrt{(x+d)^2 + y^2}$;
   $r_- = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}$;
   Donde se tomo como origen de coordenadas el punto medio entre las líneas de carga. El eje x en la dirección horizontal, y en la vertical y z en la dirección de la línea de carga.

2. Para describir las superficies equipotenciales definiremos $k = exp(\frac{4\pi\epsilon_0\phi}{\lambda})$ Para el caso de $k \neq 1$ la ecuación que define las superficies es:
   $k = \frac{(x-d)^2+y^2}{(x+d)^2+y^2}$
   Lo que nos deja la siguiente ecuación:
   $x^2 + y^2 - 2d\frac{1+k}{1-k}x + d^2 = 0$
   Recordando la ecuación que define a una circunferencia de radio R y centro en x_0 es:
   $x^2 + y^2 - 2x_0x + x_0^2 = R^2$
   Entonces las superficies equipotenciales serán cilindros cuyo eje pasa por el punto
   $x_0 = -\frac{d(1+k)}{1-k}$
   $x^2 + y^2 - 2x_0x + x_0^2 = x_0^2 - d^2$
   Como
   $x_0^2 - d^2 = d^2\frac{((1+k)^2-(1-k)^2)}{(1-k)^2} > 0$ lo que nos da como radio de las circunferencias
   $R = \sqrt{\frac{d^2 4k}{(1-k)^2}}$
   Observar en particular que la equipotencial que tiene $\phi = 0$ ($k = 1$) es el plano mediatriz a la recta que une a ambas líneas de carga.

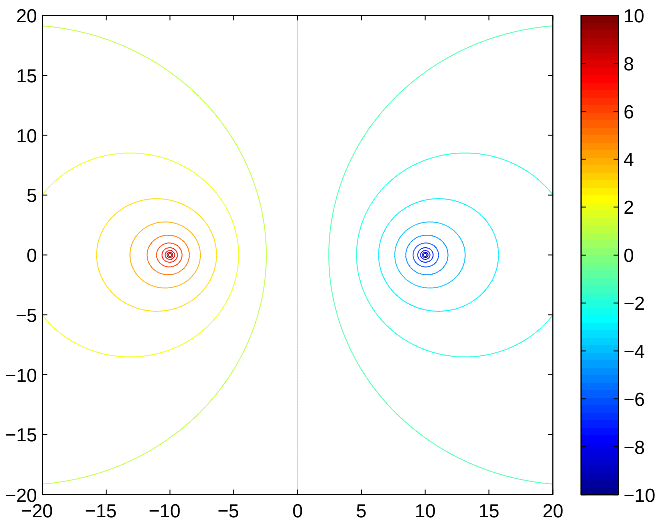

Figura 1: equipotenciales para el caso de tener dos líneas de carga ubicadas en $x = \pm 10$

3. En esta situación el potencial eléctrico verifica la ec. de Laplace. La solución del potencial encontrada en la parte anterior verifica las condiciones de borde de este problema por lo que el potencial eléctrico será (debido a la unicidad de la solución):
$\phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} Ln(\frac{(x-d)^2+y^2}{(x+d)^2+y^2})$
El campo eléctrico será:
$\vec{E} = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{((x-d)^2+y^2)((x+d)^2+y^2)} [2d(x+d)(x-d) - 2dy^2]\hat{i} + [4dyx]\hat{j}$
La desidad superficial de carga en el plano es:
$\sigma = \frac{-\lambda}{\pi} \frac{d}{d^2+y^2}$