Electromagnetismo - Examen

Instituto de Física, Facultad de Ingeniería
17 de febrero de 2012

Solución

Ejercicio 1

Parte (a)

Comenzamos tomando el origen de un sistema de coordenadas esféricas en el centro de la esfera y del cascarón. El sistema que verifica la ecuación de Laplace en cada región del espacio tendrá simetría azimutal. El potencial eléctrico podrá escribirse como una combinación de armónicos esféricos. Para cada región del espacio tendremos:

$$\phi_1(r,\theta) = \sum_{l=0} \left[A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right] P_l(cos(\theta)) \; a \leq r \leq b \; \phi_2(r,\theta) = \sum_{l=0} \left[C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}}\right] P_l(cos(\theta)) \; b \leq r$$

Donde θ verifica $0 \leq \theta \leq \pi$
La región interior a la esfera conductora no se tiene en cuenta ya que es una equipotencial por lo que tendremos $\phi(r \leq a) = V_0$
$P_l(cos(\theta))$ son los polinomios de Legendre de orden l.
Siguiendo la sugerencia nos quedamos con el desarrollo hasta el orden $l = 1$. Para poder determinar las constantes A_l, B_l, C_l, D_l ($l = 0$ y $l = 1$) debemos imponer las diferentes condiciones de borde del problema.

1. I. ϕ continuo en $r = a$
2. II. ϕ continuo en $r = b$
3. III. $\vec{E}$ discontinuo por la distribución de carga en $r = b$
4. IV. $\phi(r,\theta)_{r\to\infty} \to 0$

A partir de la condición (IV) tenemos que: $C_l = 0 \; \forall l$, por lo que ϕ_2 tendrá la forma:
$\phi_2(r,\theta) = \sum_l \left[\frac{D_l}{r^{l+1}}\right] P_l(cos(\theta)) \; b \leq r$
Aplicando $(I) \to \sum_l \left[A_l a^l + \frac{B_l}{a^{l+1}}\right] P_l(cos(\theta)) = V_0$ donde podemos deducir:

$A_0 + \frac{B_0}{a} = V_0$ (1)
$A_1 a + \frac{B_1}{a^2} = 0$ (2)

A partir de $(II) \to \sum_l \left[A_l b^l + \frac{B_l}{b^{l+1}} - \frac{D_l}{b^{l+1}}\right] P_l(cos(\theta)) = 0$ usando la independencia lineal de los polinomios de Legendre tenemos:
$A_l b^l + \frac{B_l}{b^l} = \frac{D_l}{b^l} \to D_l = A_l b^{2l+1} + B_l$ (3)
por último usando la condición (III) tendremos que:

$\sum_{l=0} \left[(l+1)\left[\frac{B_l - D_l}{b^{l+2}}\right] - l A_l b^l\right] P_l(cos(\theta) = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} cos(\theta)$

Evaluando la ecuación anterior en diferentes valores de l tenemos:

$B_0 = D_0$ para $l = 0$ (4)
$\left[2(\frac{B_1 - D_1}{b^3}) - A_1\right] cos(\theta) = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} cos(\theta)$ para $l = 1$ (5)

Con todas estas condiciones se pueden determinar todas las constantes que hacen falta.
A partir de (3) y (4) $\rightarrow A_0 = 0$
Usando (1) $\rightarrow B_0 = aV_0$
Evaluado (3) en $l = 1$ y combinando con (2) $D_1 = A_1(b^3 - a^3)$
por último usando (2), (3) y (5) llegamos a: $\rightarrow A_1 = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}$
Para finalizar:
$D_1 = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}(b^3 - a^3)$
$B_1 = -\frac{\sigma_0 a^3}{3\epsilon_0}$

El potencial eléctrico es:

$\phi_1(r, \theta) = \frac{aV_0}{r} + \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}[r - \frac{a^3}{r^2}] cos(\theta)$ $a \leq r \leq b$
$\phi_2(r, \theta) = \frac{aV_0}{r} + (\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0})\frac{(b^3 - a^3)}{r^2} cos(\theta)$ $b \leq r$

La solución encontrada (hasta $l = 1$) verifica todas las condiciones de borde del problema y es solución de la ecuación de Laplace. La unicidad de la solución de Laplace nos permite asegurar que los demás coeficientes del desarrollo ($l > 1$) son nulos. Por lo tanto los potenciales anteriores son la solución completa del problema.

Parte (b)

La componente radial del campo eléctrico en la región 1 es:

$E_{1r}(r, \theta) = -\frac{\partial V_1}{\partial r} = \frac{aV_0}{r^2} - (\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}(1 + \frac{2a^3}{r^3})) cos(\theta)$
Por lo que la densidad superficial de carga inducida en la esfera será:

$\sigma_i(\theta) = \frac{\epsilon_0 V_0}{a} - \sigma_0 cos(\theta)$

Ejercicio 2

a) Sean $\hat{V}_I$ y $\hat{V}_R$ los fasores asociados a los voltajes $v_i(t)$ y $v_R(t)$.
Como $v_I = V_I \cos(\omega t)$ entonces $\hat{V}_I = V_I$.
Por la ley de ohm para impedancias y como la resistencia, el inductor y el capacitor se encuentran en serie: $\hat{I} = \dfrac{\hat{V}_I}{Z} = \dfrac{V_I}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$
Por la ley de ohm:
$\hat{V}_R = R\hat{I} = \dfrac{R\ V_I}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})}} e^{-j\varphi} V_I \qquad \text{con } \varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$
Entonces:
$v_R(t) = Re\left\{\hat{V}_R\ e^{j\omega t}\right\} = \dfrac{R\ V_I}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})}} e^{j(\omega t - \varphi)^2}$

$$\Rightarrow \boxed{v_R(t) = \frac{R\ V_I}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t - \varphi)}$$

b) Solo disipa potencia la resistencia: $P_m = \frac{\hat{V}_R^2}{2R} \Rightarrow \boxed{P_m = \frac{1}{2}\frac{R\ V_I^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$

Por definición de potencia media: $E = P_m T$ donde T es un período del voltaje v_I.

$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \boxed{E = \frac{\pi R V_I^2}{\omega\left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)}}$

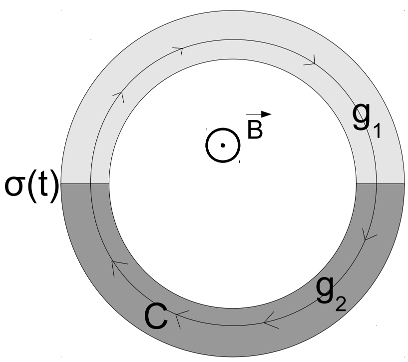
c) Por el principio de superposición: $\boxed{v_R(t) = v_{R,70}(t) + v_{R,t}(700) + v_{R,7000}(t)}$
con $v_{R,70}$, $v_{R,700}$ y $v_{R,7000}$ la tensión en la resistencia correspondiente a $\omega = 70\ rad/s$, $\omega = 700\ rad/s$ y $\omega = 7000\ rad/s$ respectivamente.
Utilizando el resultado de la parte **a)** y sustituyendo el valor de los datos:

$\boxed{v_{R,70}(t) = 0{,}070\cos(70\ t + 1{,}5)}$

$\boxed{v_{R,700}(t) = 0{,}999\cos(700\ t + 0{,}04)}$

$\boxed{v_{R,7000}(t) = 0{,}068\cos(7000\ t - 1{,}5)}$

Ejercicio 3



a) Sean J_1, E_1, J_2 y E_2 las componentes tangenciales de los campos en los medios 1 y 2 respectivamente, tomadas como positivas en sentido horario. Las ecuaciones de Gauss y de continuidad, aplicadas a la frontera entre los dos medios marcada con $\sigma(t)$ en la figura, dan:

$E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

$J_2 - J_1 = \dot{\sigma}$

Aplicando la ley de Faraday a la curva C de la figura se tiene:

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l} = \pi R^2 \alpha$$

que, en términos de las componentes del campo eléctrico queda:

$\pi R E_1 + \pi R E_2 = \pi R^2 \alpha$
Dado que ambos conductores son óhmicos:

$J_1 = g_1 E_1$ y $J_1 = g_1 E_1$

Combinando todo lo anterior se tiene la siguiente ecuación diferencial para $\sigma(t)$:

$\dot{\sigma} + \frac{g_1+g_2}{2\epsilon_0}\sigma = R\alpha\frac{(g_2-g_1)}{2}$

Resolviendo la ecuación diferencial con la condición inicial $\sigma(0) = 0$ se tiene:

$\sigma(t) = \epsilon_0 R\alpha\frac{g_2-g_1}{g_2+g_1}(1 - e^{-\frac{g_1+g_2}{2\epsilon_0}t})$

b) De las ecuaciones anteriores se tiene E_1 en función de $\sigma(t)$:

$E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{R\alpha}{2}$

Entonces:

$E_1 = \frac{R\alpha}{2}(\frac{2g_2}{g_1+g_2} - \frac{g_2-g_1}{g_1+g_2}e^{-\frac{g_1+g_2}{2\epsilon_0}t})$

La potencia instantanea consumida por el medio 1 es:

$$P = \int_{V_1} \vec{J}_1.\vec{E}_1 dV = V_1 g_1 |E_1|^2$$

Donde se utilizó en la última igualdad el hecho de que el producto $\vec{J}_1.\vec{E}_1$ es constante a través del volumen del medio 1.
Integrando entre $t = 0$ y $t = t_0$ se obtiene la energía disipada en el medio 1 en ese lapso:

$$U = \int_0^{t_0} P dt = \frac{V_1 g_1 (R\alpha)^2}{4}\left[\left(\frac{2g_2}{g_1+g_2}\right)^2 t_0 + \left(\frac{g_2-g_1}{g_1+g_2}\right)^2 \frac{1-e^{-\frac{g_1+g_2}{\epsilon_0}t}}{\frac{g_1+g_2}{\epsilon_0}} - 2\frac{g_2-g_1}{g_1+g_2}\left(\frac{2g_2}{g_1+g_2}\right)\frac{1-e^{-\frac{g_1+g_2}{2\epsilon_0}t}}{\frac{g_1+g_2}{2\epsilon_0}}\right]$$

Dado que lo que interesa es la Energía por unidad de longitud del cilindro $\tilde{U}$, es necesario dividir el resultado anterior entre la longitud del cilindro. Utilizando que $\frac{V_1}{L} = \pi((R+dR)^2 - R^2)$ se tiene:

$\tilde{U} = \frac{U\pi((dR)^2+2RdR)}{V_1} \simeq \frac{U\pi 2RdR}{V_1}$

donde en la última igualdad se despreció el término en $(dR)^2$, aunque esto no es imprescindible.