Electromagnetismo - Segundo Parcial

Instituto de Física, Facultad de Ingeniería

30 de noviembre de 2011

Solución

Ejercicio 1

1. Tal como señala la letra, la densidad volumétrica de carga inicial en el dieléctrico es nula. Si se considera la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

y se sustituye la ley de Ohm $\vec{J} = g\vec{E}$ se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -g\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{g}{\epsilon}\rho$$

donde para la última ecuación se utilizó la ley de Gauss $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon$.

La solución general de dicha ecuación es

$$\rho(t) = \rho(t=0)\mathrm{e}^{-\frac{g}{\epsilon}t}$$

pero como $\rho(t=0) = 0$, se tiene que $\rho(t) = 0$ en todo tiempo.

2. Por la simetría del problema, el campo eléctrico es radial. Para fijar ideas, supongamos $\sigma > 0$ lo que da lugar a un campo eléctrico saliente para distancias al eje r que verifican $R_1 < r < R_2$. Si se aplica la ley de Gauss en su forma integral para un cilindro de radio r con igual eje que los cilindros de radios R_1 y R_2, se obtiene

$$E 2\pi r l = \frac{l\sigma 2\pi R_1}{\epsilon}$$

donde l es la altura del cilindro para $R_1 < r < R_2$. Dentro del cilindro R_1 no hay carga encerrada por lo que $E = 0$. Aquí se utilizó que la carga total q en cilindro R_1 es $2\pi\sigma R_1 L$.

Ahora, la densidad de corriente es $\vec{J} = g\vec{E}$, por lo que integrando sobre la superficie lateral del cilindro antes mencionado se puede calcular la corriente $I = L2\pi\frac{g}{\epsilon}\sigma R_1$ donde L es la longitud de los cilindros R_1 y R_2.

Ahora bien, dicha corriente verifica

$$I = -\frac{dq}{dt} = -2\pi R_1 L\frac{d\sigma}{dt}$$

por lo que sustituyendo la expresión de I se obtiene

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{g}{\epsilon}\sigma$$

La solución de dicha ecuación es, como en la parte 1,

$$\sigma(t) = \sigma(t=0)\mathrm{e}^{-\frac{g}{\epsilon}t}$$

Se observa que la densidad de corriente decrece exponencialmente tendiendo a cero para $t \to \infty$ pero permaneciendo positiva para todo t finito. En este sentido, y en la medida en que se utiliza un modelo continuo que ignora la cuantización de la carga, parecería que el condensador siempre permanece cargado. Sin embargo, el decrecimiento exponencial hace que cuando t es unas pocas veces mayor que ϵ/g, la densidad de carga se vuelve extremadamente pequeña y el en la práctica la carga acumulada se vuele inobservable y por ello puede considerarse el condensador como descargado. Para dar una idea cuantitativa, el tiempo necesario para que $\sigma(t)$ tenga un valor igual al 1 % de su valor inicial, corresponde a $\mathrm{e}^{-\frac{g}{\epsilon}t} = 10^{-2}$, o lo que es lo mismo, $t \simeq = \dfrac{\epsilon}{g} \times 4,6$.

3. La potencia disipada por efecto Joule puede calcularse de varias maneras. Se puede, por ejemplo, calcular la resistencia total del sistema. Para ello, se puede calcular la caída de potencial entre R_1 y R_2:

$$V = -\frac{\sigma R_1}{\epsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\sigma R_1}{\epsilon}\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Gracias a la corriente calculada en el ejercicio anterior, puede deducirse la resistencia del dispositivo:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2\pi g L}\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

De esto se puede deducir fácilmente la potencia disipada por efecto Joule por unidad de longitud :

$$\frac{\mathcal{P}}{L} = \frac{\mathcal{R}I^2}{L} = 2\pi g\frac{R_1^2}{\epsilon^2}\big(\sigma(t=0)\big)^2\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\mathrm{e}^{-2\frac{g}{\epsilon}t}$$

A partir de esta expresión puede calcularse la energía total disipada por unidad de longitud:

$$\frac{E_{discip}}{L} = \int_0^\infty dt\frac{\mathcal{P}}{L} = \pi\frac{R_1^2}{\epsilon}\big(\sigma(t=0)\big)^2\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

La energía electrostática almacenada inicialmente puede calcularse de varias maneras. Por ejemplo, puede calcularse la capacidad del condensador, gracias a $C = q/V$ que, utilizando las expresiones de q y V calculadas previamente da:

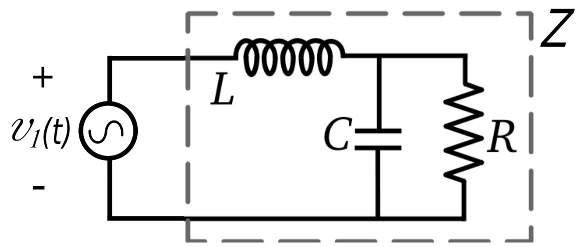
$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Conocida la capacidad, la energía inicialmente almacenada en el capacitor es

$$E_{inic} = \frac{1}{2}CV^2 = \pi L\frac{R_1^2}{\epsilon}\big(\sigma(t=0)\big)^2\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

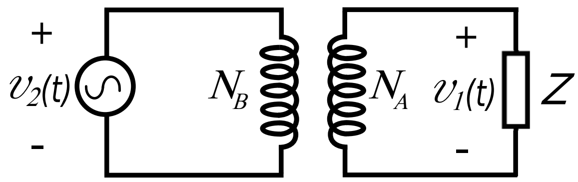
lo que coincide con la energía disipada total calculada previamente.

Ejercicio 2



1. Z es la impedancia resultante de componer las impedancias asociadas al inductor, la resistencia y el capacitor (el inductor en serie con el paralelo de la resistencia y del capacitor):

$$Z = j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{R - \omega^2 RLC + j\omega L}{1 + j\omega CR} \Longrightarrow \boxed{Z = |Z|e^{j\varphi_Z}}$$



donde:

$$\boxed{|Z| = \frac{\sqrt{(\omega L)^2 + (R - \omega^2 LRC)^2}}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}} \quad \text{y} \quad \boxed{\varphi_Z = \arctan\left(\frac{\omega L}{R - \omega^2 LRC}\right) - \arctan(\omega CR)}$$

Aplicando la ley de Ohm, y observando que $\hat{V} = V_{10}$:

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z} = \frac{V_{10}}{|Z|e^{j\varphi_Z}}$$

Por definición de fasor:

$$i(t) = \text{Re}\left(\hat{I}e^{j\omega t}\right) = \text{Re}\left(\frac{V_{10}}{|Z|}e^{j(\omega t - \varphi_Z)}\right) \Longrightarrow \boxed{i(t) = \frac{V_{10}}{|Z|}\cos(\omega t - \varphi_Z)}$$

2. La potencia media consumida por la impedancia Z es :

$$P = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\varphi_Z) = \frac{1}{2}\frac{V_{10}^2}{|Z|}\cos(\varphi_Z)$$

Entonces, $\boxed{V_{10} = \sqrt{\frac{2P|Z|}{\cos(\varphi_Z)}}}$

3. Para el cálculo de potencia lo que interesa es la amplitud del voltaje.

La fuente entrega una tensión (V_{20}) mayor que la que se precisa (V_{10}), por lo que se debe utilizar el transformador de forma que baje la tensión.

En un transformador ideal, $v_B = \frac{N_B}{N_A}v_A$.

Como $N_A < N_B$ y $v_B > v_A$, si se conecta la fuente v_2 en el lado "B"(ver figura) del transformador entonces $v_1 = v_A = \frac{N_A}{N_B}v_B = \frac{N_A}{N_B}v_2$. En particular, $V_{10} = \frac{N_A}{N_B}V_{20}$.

Por lo tanto, $\boxed{\frac{N_A}{N_B} = \frac{V_{10}}{V_{20}}}$, con V_{10} calculado en la parte anterior.

Obs: Se cumple que $N_A/N_B < 1$ ya que $V_{10} < V_{20}$.

4. Se puede pensar a la fuente como: $v_2 = v_2^{(1)} + v_2^{(2)}$ donde: $v_2^{(1)} = V_{20}\cos(\omega t)$ y $v_2^{(2)} = V_{20}$.

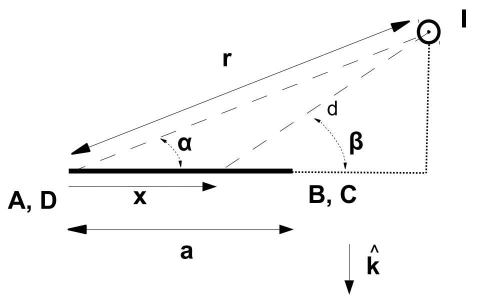
Como el circuito es lineal, el efecto que produce sobre el mismo la tensión v_2, es el mismo que produciría la suma de los efectos de $v_2^{(1)}$ y $v_2^{(1)}$ en forma separada (principio de superposición). El primero fue hallado en las partes anteriores y el segundo será nulo, ya que los transformadores no responden a una corriente continua (ley de Faraday).

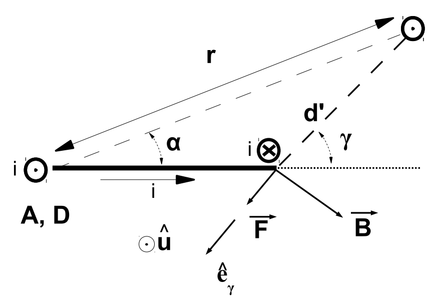
Por lo tanto, no se producirá ningún cambio al utilizar esta fuente.

Ejercicio 3

1. La componente del campo magnético perpendicular a la espira, en un punto a una distancia x del eje, es:

$$\vec{B}(x).\hat{k} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\cos(\beta)$$





Siendo d y β los que se muestran en la figura, con:

$$d^2 = r^2\sin^2(\alpha) + (r\cos(\alpha) - x)^2$$

$$d\cos(\beta) = r\cos(\alpha) - x$$

El flujo de campo magnético, calculado en la dirección del $\hat{k}$ que se muestra en la figura es:

$$\Phi = \int \vec{B}.\hat{k}da = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\int_0^a \frac{(r\cos(\alpha) - x)dx}{r^2\sin^2(\alpha) + (r\cos(\alpha) - x)^2}$$

A partir de lo cual se obtiene:

$$\Phi = -\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\frac{1}{2}\ln(\frac{r^2 + a^2 - 2ra\cos(\alpha)}{r^2})$$

2. De la ley de Faraday se obtiene la corriente por la espira:

$$iR = \dot{\Phi} = -\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\frac{1}{2}\frac{2ra\sin\alpha\dot{\alpha}}{r^2 + a^2 - 2ra\cos(\alpha)}$$

donde el sentido es el que se muestra en la figura.

La fuerza sobre la arista BC de la espira queda:

$$\vec{F} = iBb\hat{e}_\gamma$$

con

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d'}$$

$$d'^2 = r^2\sin^2(\alpha) + (r\cos(\alpha) - a)^2$$

Si bien se ejercen otras fuerzas de origen magnético sobre la espira, esta es la única que produce un momento sobre el eje AD en la dirección vertical. Dicho momento queda:

$$\vec{M}.\hat{u} = -iBba\sin(\gamma) = -iba\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\sin(\gamma)}{d'}$$

$$= -iba\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r\sin(\alpha)}{d'^2}$$

Finalmente, se tiene:

$$\vec{M}.\hat{u} = (\frac{\mu_0 Ib}{2\pi})^2\frac{a^2}{R}\frac{r^2\sin^2(\alpha)}{(r^2+a^2-2ra\cos(\alpha))^2}\dot{\alpha}$$

3. La segunda cardinal sobre la espira en la dirección de $\hat{u}$, con respecto al eje AD queda:

$$J\ddot{\theta} = \vec{M}.\hat{u}$$

con $\alpha = \varphi - \theta$ y $\dot{\alpha} = \dot{\varphi} - \dot{\theta}$. Para que la espira gire a velocidad angular constante es necesario que el torque neto sobre la misma, es decir el torque debido a la fuerza magnética, sea nulo. Si la espira gira con la misma velocidad angular que el cable infinito, esta queda en reposo relativo con respecto al campo generado por el mismo. La corriente por la espira es entonces nula (dado que la fem inducida es nula - el flujo no varía con el tiempo) y por lo tanto el momento por la espira también lo es, manteniéndose de esa forma el movimiento de rotación a velocidad angular constante.