Electromagnetismo - Primer Parcial

Instituto de Física, Facultad de Ingeniería

29 de setiembre de 2011

Solución

Ejercicio 1

Parte 1

La carga total es nula, debido a que la densidad de carga es una función impar de la varible z y el dominio de integración es simétrico respecto al plano Oxy. Esto también se lo puede ver por un cálculo directo:

$$q = \int_V \rho dv = 2\pi \int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \mathrm{sen}\theta r^2 \lambda r \cos\theta = 2\pi\lambda \int_0^a dr r^3 \int_{-1}^1 du u = 0$$

dónde en la última ecuación se empleó el cambio de variables $u = \cos\theta$. co Por un razonamiento similar se puede concluir que las componentes según $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ del vector momento dipolar eléctrico también son nulas (el integrando es impar en x para p_x y en y para p_y y el dominio de integración es simétrico también en estas variables). Este resultado también surge de un cálculo directo:

$$\vec{p} = \int_V \rho(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})dv = \int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \mathrm{sen}\theta r^4 \lambda \cos\theta \big(\mathrm{sen}\theta\cos\phi\vec{i}+\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi\vec{i}+\cos\theta\vec{k}\big)$$

La integral sobre la variable ϕ da cero para las componentes según $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ por lo que:

$$\vec{p} = 2\pi\lambda\vec{k} \int_0^a dr r^4 \int_0^\pi d\theta \mathrm{sen}\theta\cos^2\theta = 2\pi\lambda\vec{k}\frac{a^5}{5}\int_{-1}^1 du u^2 = \boxed{4\pi\lambda\frac{a^5}{15}\hat{k}}$$

dónde nuevamente el cambio de variables $u = \cos\theta$ fue empleado.

Al ser la carga neta nula, el primer término no nulo del desarrollo multipolar es el término dipolar. Por ello, para $r \gg a$, el potencial se comporta como

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}}$$

Parte 2

Dado que el problema tiene simetría azimultal y la variable θ puede tomar todos los valores entre 0 y π, la solución puede escribirse como suma de armónimos de zona:

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\Big(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\Big)$$

Ahora bien, para $r \to 0$, el potencial está dominado por el dipolo puntual ubicado en el origen. Por ello $B_0 = 0$ (no hay carga neta en $r = 0$) y $B_n = 0$ para $n \geq 2$ (pues en en $r = 0$ hay sólo un dipolo puntual y no términos de mayor orden en el desarrollo multipolar). Además, debido a que se comporta como el dipolo $B_1 = p/(4\pi\epsilon_0)$. Entonces tenemos que:

$$\varphi(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) A_n r^n$$

Ahora bien, en $r = R$ hay un conductor. Por ello, para todo valor de θ, $\varphi(r,\theta) = \varphi_0$ (siendo φ_0 el valor del potencial al que está el conductor). De ello concluimos que $A_0 = \varphi_0$,

$A_1 R + p/(4\pi R^2) = 0$ y que $A_n = 0$ para todos los n mayores o iguales a 2. Concluimos entonces que

$$\boxed{\varphi(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{pr\cos\theta}{R^3} + \varphi_0}$$

El valor de φ_0 es arbitrario y sólo refleja un nivel cero arbitrario del potencial.

A partir de esta expresión del potencial, podemos calcular las tres componentes del vector campo eléctrico. Para ello, es conveniente recordar que $z = r\cos\theta$ y que $\partial r/\partial z = z/r$. De esto deducimos que:

$$\begin{aligned} E_x &= -3\frac{pxz}{4\pi\epsilon_0 r^5} \\ E_y &= -3\frac{pyz}{4\pi\epsilon_0 r^5} \\ E_z &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) - 3\frac{pz^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} \end{aligned}$$

Ejercicio 2

Parte 1

La capacitancia de cada condensador se puede calcular como la capacitancia equivalente de dos capacitores en paralelo. El primero con un dieléctrico de permitividad ϵ y el segundo en vacío. Tendremos entonces:

$$C_1 = \frac{(\pi-\theta)L\epsilon_0}{Ln(\frac{R_2}{R_1})} + \frac{\theta L\epsilon}{Ln(\frac{R_2}{R_1})}$$

Lo que da:

$$C_1 = \frac{\theta L(\epsilon-\epsilon_0)+\pi L\epsilon_0}{Ln(\frac{R_2}{R_1})}$$

Razonando de forma similar para el capacitor 2

$$C_2 = \frac{(\alpha-\theta)L(\epsilon-\epsilon_0)+\pi L\epsilon_0}{Ln(\frac{R_2}{R_1})}$$

Utilizando la relación entre la carga y la diferencia de potencial en un capacitor $Q = CV$ tendremos:

$$\boxed{Q_1 = \frac{\theta L(\epsilon-\epsilon_0)+\pi L\epsilon_0}{Ln(\frac{R_2}{R_1})}V_1} \text{ y } \boxed{Q_2 = \frac{(\alpha-\theta)L(\epsilon-\epsilon_0)+\pi L\epsilon_0}{Ln(\frac{R_2}{R_1})}V_2}$$

Recordando que la energía en un capacitor es $U = \frac{1}{2}CV^2$ tendremos:

$$\boxed{U_1 = \frac{\theta L(\epsilon-\epsilon_0)+\pi L\epsilon_0}{2Ln(\frac{R_2}{R_1})}V_1^2} \text{ y } \boxed{U_2 = \frac{(\alpha-\theta)L(\epsilon-\epsilon_0)+\pi L\epsilon_0}{2Ln(\frac{R_2}{R_1})}V_2^2}$$

Parte 2

El momento de la fuerza electrostática sobre el dieléctrico será el resultante de los momentos de fuerzas debidos a cada capacitor.

Calculando las derivadas en el mismo instante podemos utilizar cualquier expresión para el momento de las fuerzas.

$$\overrightarrow{\tau_1} = \left(\frac{\partial U_1}{\partial\theta}\right)_V \hat{k}$$

$\overrightarrow{\tau_2} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial \theta}\right)_V \hat{k}$
con $\hat{k}$ entrante al plano del dibujo

$\overrightarrow{\tau_1} = \left(\frac{L(\epsilon-\epsilon_0)V_1^2}{2Ln\frac{R_2}{R_1}}\right)\hat{k}$
$\overrightarrow{\tau_2} = -\left(\frac{L(\epsilon-\epsilon_0)V_2^2}{2Ln\frac{R_2}{R_1}}\right)\hat{k}$

El momento total será:

$$\boxed{\overrightarrow{\tau} = \left(\frac{L(\epsilon-\epsilon_0)(V_1^2 - V_2^2)}{2Ln\frac{R_2}{R_1}}\right)\hat{k}}$$

Ejercicio 3

Dado que se acumula carga de polarización en la interfaz, el campo eléctrico será discontinuo sobre la misma, por lo que es necesario separar el análisis del problema en dos zonas. La zona I corresponde al dieléctrico de polarización constante y la zona II al dieléctrico lineal.

Parte 1

Para demostrar que la ecuación de Laplace se cumple en cada una de las zonas basta verificar que $\nabla.\overrightarrow{E} = 0$ en cada zona (dado que $\overrightarrow{E} = -\nabla\Phi$).
Dado que no hay carga libre en el espacio entre las placas, en cada zona se cumple $\nabla.\overrightarrow{D} = 0$.

Zona I:
Por no haber carga libre:
$\nabla.\overrightarrow{D} = 0$
La definición del desplazamiento eléctrico es:
$\overrightarrow{D} = \epsilon_0\overrightarrow{E} + \overrightarrow{P}$
Por lo tanto:
$\nabla.\overrightarrow{D} = \epsilon_0\nabla.\overrightarrow{E} + \nabla.\overrightarrow{P} = 0$
Como la polarización es constante $\nabla.\overrightarrow{P} = 0$ y por lo tanto $\nabla.\overrightarrow{E} = 0$ y se cumple la ec. de Laplace.

Zona II:
Como el dieléctrico es lineal $\overrightarrow{D} = \epsilon\overrightarrow{E}$ y $\nabla.\overrightarrow{D} = 0$ implica de inmediato $\nabla.\overrightarrow{E} = 0$.

Parte 2

Se toma x como la coordenada horizontal creciente en la dirección del versor $\hat{i}$ de la figura, con origen de coordenadas en la interfaz. Sean Φ_I yΦ_{II} los potenciales electrostáticos en las zonas I y II respectivamente. Por la simetría del problema, los potenciales sólo pueden depender de la variable x. Como estos son a su vez soluciones de la ecuación de Laplace, necesariamente tienen que ser de la forma:

$\Phi_I(x) = A_I x + B_I$
$\Phi_I I(x) = A_{II} x + B_{II}$

Las constantes se determinan planteando las condiciones de borde:
(1) $\Phi_I(x = 0) = \Phi_{II}(x = 0)$ Continuidad del Potencial
(2) $\overrightarrow{D}_I(x = 0).\hat{i} = \overrightarrow{D}_{II}(x = 0).\hat{i}$ Carga libre nula en la interfaz

(3) $\Phi_I(x=-a) - \Phi_{II}(x=d-a) = V_0$

En términos de las constantes a determinar se tiene:
(1) $B_I = B_{II}$
(2) $-A_I\epsilon_0 + P_0 = -A_{II}\epsilon$
(3) $-A_I a - A_{II}(d-a) = V_0$

El campo eléctrico en cada zona queda:

$$\boxed{\vec{E}_I = -A_I\hat{i} = \frac{\epsilon V_0 - P_0(d-a)}{\epsilon a + \epsilon_0(d-a)}\hat{i}}$$

$$\boxed{\vec{E}_{II} = -A_{II}\hat{i} = \frac{P_0 a + V_0\epsilon_0}{\epsilon a + \epsilon_0(d-a)}\hat{i}}$$

<u>Parte 3</u>

Cargas de polarización:
En la interfaz: $\boxed{\sigma_{Pint} = \vec{P}_I.\hat{i} + \vec{P}_{II}.(-\hat{i}) = P_0 - (\epsilon-\epsilon_0)(-A_{II})}$
En la placa de la izq.: $\boxed{\sigma_{Pizq} = \vec{P}_I.(-\hat{i}) = -P_0}$
En la placa de la der.: $\boxed{\sigma_{Pder} = \vec{P}_{II}.\hat{i} = (\epsilon-\epsilon_0)(-A_{II})}$

Cargas libres:
En la placa de la izq.: $\boxed{\sigma_{Lizq} = (\epsilon_0\vec{E}_I + P_0\hat{i}).(\hat{i})}$
En la placa de la der.: $\boxed{\sigma_{Lder} = (\epsilon\vec{E}_{II}).(-\hat{i})}$
Por lo visto en la parte 1, todas las densidades volumétricas de carga son nulas.