Electromagnetismo - Examen

Instituto de Física, Facultad de Ingeniería
13 de diciembre de 2011

Solución

Ejercicio 1

1. a) Se desea hallar la forma del potencial dentro de la cavidad. El potencial supuesto como sugerencia consiste en la suma de los potenciales de dos cargas puntuales situadas en las posiciones $\vec{r} = l_1\hat{k}$ y $\vec{r} = l_1\hat{k}$, de cargas A_1 y A_2 respectivamente.

Para que dicho potencial describa adecuadamente el potencial de una carga q situada en la posición $\vec{r} = d\hat{k}$, en la zona cercana a la misma, se debe tener que uno de los términos del potencial debe coincidir con el potencial generado por esta carga. Tomamos entonces $A_1 = q$ y $l_1 = d$. Dado que no existen otras cargas puntuales en la cavidad se debe tener que $|l_2| > R$.

Dado que la esfera es un conductor ideal, el potencial en la superficie de la esfera que limita la cavidad debe ser constante. Dado que el potencial está definido a menos de una constante, es posible tomar, tal como la lo indica la sugerencia, el potencial igual a cero en la superficie esférica. En particular, potencial se debe anular en cualquier pareja de puntos que se tomen en la esfera, por ejemplo:

$\phi(\vec{r} = R\hat{k}) = 0$
$\phi(\vec{r} = -R\hat{k}) = 0$

De lo cual se obtiene: $\frac{q}{R-d} + \frac{A_2}{|R-l_2|} = 0$
$\frac{q}{R+d} + \frac{A_2}{|-R-l_2|} = 0$

Como $R < l_2$:

$\frac{q}{R-d} + \frac{A_2}{l_2-R} = 0$
$\frac{q}{R+d} + \frac{A_2}{R+l_2} = 0$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para A_2 y l_2 se tiene:

$l_2 = \frac{R^2}{d}$
$A_2 = -\frac{R}{d}q$

b) El potencial propuesto en la parte (a) verifica la ecuación de Laplace por ser la suma de dos potenciales de cargas puntuales. Para verificar que se cumple la condición de borde se escribe el potencial en términos de las variables de esféricas θ y r:

$\phi(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2dr\cos(\theta)}} + \frac{-\frac{R}{d}q}{\sqrt{r^2+(\frac{R^2}{d})^2-2\frac{R^2}{d}r\cos(\theta)}}\right)$

Esta expresión se anula para todo θ si la evaluamos en $r = R$ por lo que se verifican las condiciones de borde.

2. El campo eléctrico dentro de la cavidad es el generado por las dos cargas puntuales:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q(\vec{r}-d\hat{k})}{\mid \vec{r}-l_1\hat{k}\mid^{3/2}} + \frac{-q\frac{R}{d}(\vec{r}-\frac{R^2}{d}\hat{k})}{\mid \vec{r}-\frac{R^2}{d}\hat{k}\mid^{3/2}}\right)$$

3. La fuerza sobre la carga q puede obtenerse como la fuerza de Coulomb que ejerce la carga imagen A_2 sobre q:

$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2\frac{R}{d}}{(\frac{R^2}{d}-d)^2}\hat{k}$

Ejercicio 2

Pasando a fasores y escribiendo la caída de potencial para cada malla obtenemos:
$V_0 = (R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L_1)I_1 + (R + j\omega M)I_2$

para la malla que incluye a L_1

$V_0 = (R + \frac{2}{j\omega C} + j\omega L_2)I_2 + (R + j\omega M)I_1$

para la malla que incluye a L_2
donde usamos:
$I_R = I_1 + I_2$
Para la corriente por la resistencia

1. Para el caso de $I_R = 0$ tenemos: $I_1 = -I_2$ y la ecuación de mallas nos determinará que: $j\omega(L_1 - M) + \frac{1}{j\omega C} = j\omega(M - L_2) - \frac{2}{j\omega C}$

   De donde obtenemos: $\omega^2 = \frac{3}{C(L_1+L_2-2M)}$

   Para las corrientes tenemos: $i_{L_1}(t) = \frac{\omega C V_0}{1-\omega^2 C(L_1-M)}cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -i_{L_2}(t)$ o lo que es lo mismo
   $i_{L_1}(t) = \frac{-\omega C V_0}{1-\omega^2 C(L_1-M)}sen(\omega t)$

2. Si imponemos $I_1 = 0$ De la ecuación de las mallas tenemos:
   $j\omega M = j\omega L_2 + \frac{2}{j\omega C} \Rightarrow \omega^2 = \frac{2}{C(L_2-M)}$

3. En este caso la corriente por el inductor L_2 es:
   $I_2 = \frac{V_0}{R+j\omega M}$

   $i_2(t) = \frac{V_0}{\sqrt{(\omega M)^2+(R)^2}}cos(\omega t + \phi)$
   Donde ϕ es la fase de la corriente

   La potencia media disipada en la resistencia será:

   $P = \frac{1}{2}\frac{V_0^2 R}{(R)^2+(\omega M)^2}$