Solución del examen de Electromagnetismo de febrero de 2011

Curso 2010

Problema 1

a)

Se piensan como dos condensadores en paralelo. Sea 1 el condensador de altura h y 2 el condensador de altura $L-h$. Sabemos que la capacidad de un condensador cilíndrico de altura ℓ y radios interior y exterior R_2 y R_1 respectivamente es

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\ell}{\ln(R_1/R_2)}$$

de donde

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon h}{\ln(R_1/R_2)} = \frac{Q_1}{V_1}, \qquad C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_0(L-h)}{\ln(R_1/R_2)} = \frac{Q_2}{V_2},$$

pero $V_1 = V_2 = V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1+C_2}$. Ahora podemos despejar Q_1 y Q_2, dando

$$\boxed{Q_1 = \frac{|Q|}{1+\frac{L-h}{kh}}}, \qquad \boxed{Q_2 = \frac{|Q|}{1+\frac{L-h}{kh}}\frac{(L-h)}{kh}}$$

donde definimos $k = \varepsilon/\varepsilon_0$, la constante dieléctrica del medio.

b)

La energía del sistema está dada por

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2\ln(R_1/R_2)}{4\pi}\frac{1}{\varepsilon h + \varepsilon_0(L-h)}$$

La fuerza sobre la porción de dieléctrico está dada por

$$F = -\frac{dU}{dh}_{|Q=cte.} = \frac{Q^2\ln(R_1/R_2)}{4\pi}\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\left[h(\varepsilon-\varepsilon_0)+L\varepsilon_0\right]^2}$$

en la dirección ascendente. Esta fuerza debe estar equilibrada con el peso de fluido, de donde

$$\frac{Q^2\ln(R_1/R_2)}{4\pi}\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\left[h(\varepsilon-\varepsilon_0)+L\varepsilon_0\right]^2} = \rho g h\pi(R_1^2-R_2^2)$$

Se obtiene una ecuación implícita para h, de grado 3,

$$\boxed{h^3\ (\varepsilon-\varepsilon_0)^2+h^2\ 2\varepsilon_0 L(\varepsilon-\varepsilon_0)+h\ \varepsilon_0^2 L^2-\alpha=0}$$

donde hemos definido convenientemente

$$\alpha=\frac{Q^2\ln(R_1/R_2)(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\pi\rho g h\pi(R_1^2-R_2^2)}$$

Problema 2

a)

La 2a ley de Newton aplicada a la barra resulta en (FALTA DIBUJO!)

$$mg\sin\theta-Bi_{ind}L\cos\theta=m\dot{v}$$

Por otro lado, la ley de Faraday permite hallar una expresión para la corriente inducida en función de la velocidad,

$$i_{ind}=\vec{B}LR\cos\theta v$$

Sustituyendo, la ecuación de movimiento queda

$$\dot{v}=g\sin\theta-\frac{B^2L^2\cos^2\theta}{mR}v$$

Esta ecuación diferencial la resolvemos poniendo $v=\hat{A}\exp(\alpha t)+\hat{B}$ y sustituimos imponiendo la condición $v(0)=0$, de donde resulta

$$\boxed{v(t)=\frac{mgR\sin\theta}{B^2L^2\cos^2\theta}\left(1-\exp\left(-\frac{B^2L^2\cos^2\theta}{mR}t\right)\right)}$$

b)

Tenemos, de la ecuación de movimiento, que

$$i_{ind}(\infty)=\frac{mg\sin\theta}{BL\cos\theta},$$

de donde la potencia disipada por la resistencia en estado de régimen es, por la ley de Joule,

$$P_{dis}(\infty)=Ri_{ind}^2(\infty)=\frac{m^2g^2R\sin^2\theta}{B^2L^2\cos^2\theta}$$

Por otro lado, obtenemos de la fórmula hallada para $v(t)$ que su valor límite es

$$v(\infty)=\frac{mgR\sin\theta}{B^2L^2\cos^2\theta}$$

Así, la potencia suministrada por el campo gravitatorio se calcula como

$$P_{grav}(\infty)=F\cdot v(\infty)=mg\sin\theta\ \frac{mgR\sin\theta}{B^2L^2\cos^2\theta}=\frac{m^2g^2R\sin^2\theta}{B^2L^2\cos^2\theta},$$

y así

$$\boxed{P_{dis}(\infty)=P_{grav}(\infty)=\frac{m^2g^2R\sin^2\theta}{B^2L^2\cos^2\theta}}$$

c)

La dirección de la fuerza sería la misma que la considerada en la parte anterior. Si bien la corriente inducida tendrá el sentido contrario, como el campo magnético también tiene la dirección opuesta, al hacer el producto vectorial con el campo dirigido hacia abajo la fuerza magnética sobre la barra no cambia de dirección.

Problema 3

a)

De acuerdo con la ley de Ampére,

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = \Phi \mathcal{R} = I_E + NI,$$

siendo $\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu S}$ la reluctancia. Se tiene

$$L = \frac{d\Phi}{dI_E} = \frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{\mu S}{\ell}$$

En la situación estacionaria, $I_E = 0$ y

$$\Phi = \frac{NI}{\mathcal{R}} = B_0 S,$$

de donde

$$\boxed{B_0 = \frac{NI_0 L}{S}}$$

b)

La corriente en la espira verificará

$$RI_E = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{\mathcal{R}} \left(\frac{dI_E}{dt} + N\frac{dI}{dt} \right),$$

de donde, al integrar en el tiempo, se obtiene

$$R \int_0^t I_E(t)dt + L(I_E(t) - I_E(0)) = -NL(I(t) - I(0)),$$

pero $I_E(t) = I_E(0) = I(0) = 0$, $I(t) = I_0$, y el término que involucra la integral es justamente la carga total que se pide, de donde despejamos obteniendo

$$\boxed{Q = -\frac{NLI_0}{R}}$$