ELECTROMAGNETISMO
SOLUCIÓN DEL PRIMER PARCIAL - CURSO 2010 *

Problema 1

Trabajamos en coordenadas cilíndricas, (r, θ, z), con el eje z coincidente con el eje de simetría del problema. Definimos las regiones I y II como

$$\begin{array}{ll} \textit{reg. I:} & r \in [0, a], 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \textit{reg. II:} & r \in (a, \infty), 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}$$

El potencial electrostático es independiente de z, i.e. $V = V(r, \theta)$, y verifica la ecuación de Laplace en cada región. Sean $V_I(r, \theta)$ y $V_{II}(r, \theta)$ el potencial electrostático en las regiones I y II respectivamente. Estas funciones deben satisfacer las siguientes CB

- $V_I(r, \theta)$ no diverge cuando $r \to 0$, $\forall\ \theta$.
- $V_{II}(r, \theta) \to 0$ cuando $r \to \infty$, $\forall\ \theta$.
- $V_I(r = a, \theta) = V_{II}(r = a, \theta) = V_0 \mathrm{sen}(2\theta)$, $\forall\ \theta$.

Las soluciones de la ecuación de Laplace que satisfacen estas CB son:

$$\begin{aligned} V_I(r, \theta) &= \frac{V_0}{a^2} r^2 \mathrm{sen}(2\theta) \\ V_{II}(r, \theta) &= \frac{V_0 a^2}{r^2} \mathrm{sen}(2\theta) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left(\vec{E}_{II} - \vec{E}_I\right)_{|r=a} \cdot \hat{e}_r &= (-\nabla V_{II} + \nabla V_I)_{|r=a} \cdot \hat{e}_r \\ &= \left(\frac{2V_0}{a^2} r \mathrm{sen}(2\theta) + \frac{2V_0 a^2}{r^3} \mathrm{sen}(2\theta)\right)_{|r=a} \\ &= \frac{4V_0}{a} \mathrm{sen}(2\theta) = \sigma/\varepsilon_0 \Rightarrow \\ & \boxed{\sigma = \frac{4\varepsilon_0 V_0}{a} \mathrm{sen}(2\theta)} \end{aligned}$$

*Por correcciones o sugerencias: mforets at fing.edu.uy

Problema 2

Sean las regiones I y II aquellas con y sin dieléctrico respectivamente, es decir,

$$\begin{aligned} \textit{reg. I:} &\quad x \in (0,\infty);\ y,z \in (-\infty,+\infty) \\ \textit{reg. II:} &\quad x \in (-\infty,0);\ y,z \in (-\infty,+\infty) \end{aligned}$$

Colocamos la carga imagen Q' en la posición de Q (región II) y de valor a determinar. Colocamos la carga Q'' a una distancia $+d$ del plano $x = 0$ en 'espejo' con Q y Q', también de valor a determinar. Se busca escribir el potencial electrostático de la forma:

$$\begin{aligned} V_I &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q'}{((x+d)^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right) \\ V_{II} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{((x+d)^2+y^2+z^2)^{1/2}} + \frac{Q''}{((x-d)^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right) \end{aligned}$$

Planteamos las CB en la interfase (plano $x = 0$):

- $D_{I,\mathrm{n}} = D_{II,\mathrm{n}} \Rightarrow \varepsilon \frac{\partial V_I}{\partial x}_{|x=0} = \varepsilon_0 \frac{\partial V_{II}}{\partial x}_{|x=0}$,
  $\Rightarrow -Q'd = -Qd + Q''d \Rightarrow Q' = Q - Q''$
- $E_{I,\mathrm{y}} = E_{II,\mathrm{y}} \Rightarrow \frac{\partial V_I}{\partial y}_{|x=0} = \frac{\partial V_{II}}{\partial y}_{|x=0}, \Rightarrow -\frac{Q'}{\varepsilon} = -\frac{Q}{\varepsilon_0} - \frac{Q''}{\varepsilon_0}$

Resolviendo el sistema para Q' y Q'', queda

$$\begin{aligned} Q' &= Q\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon} \\ Q'' &= Q\left(\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{V_I(x,y,z) = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_0+\varepsilon)}\frac{1}{r}}$$

Problema 3

En la interfase (plano $y = 0$) se verifican las siguientes CB:

- estamos en condiciones electrostáticas por lo que las componentes tangenciales del campo eléctrico son continuas
  $\Rightarrow E_a \text{sen}(\theta_a) = E_v \text{sen}(\theta_v) \Rightarrow E_a = \sqrt{3} E_v$.
- no hay carga libre en la interfase entonces la componente normal del desplazamiento eléctrico es continua,
  $\Rightarrow \varepsilon E_v \cos(\theta_v) = \varepsilon_0 E_a \cos(\theta_a) \Rightarrow \varepsilon E_v \frac{1}{2} = \varepsilon_0 E_a \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Combinando las dos ecuaciones anteriores, resulta

$$\boxed{\varepsilon = 3\varepsilon_0}$$

Problema 4

Elegimos un SC cilíndricas con origen en el centro de los cilindros. Como se desprecian los efectos de borde, por simetría los campos serán radiales. Suponiendo que hay una carga Q en el cilindro interior, planteamos la ley de gauss para el desplazamiento eléctrico, obteniendo

$$D = \frac{Q}{2\pi r L}.$$

Se verificará entonces que

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi r L \varepsilon_0} \hat{e}_r - \frac{P_0}{\varepsilon_0} \hat{e}_r, \quad a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Por otra parte, como los cilindros están sometidos a una diferencia de potencial V_0, entonces

$$\begin{aligned} V_0 &= \int_a^b \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \frac{dr}{r} - \frac{P_0}{\varepsilon_0} \int_a^b dr \\ &= \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \ln(b/a) - \frac{P_0}{\varepsilon_0}(b-a) \end{aligned}$$

A continuación sustitutimos V_0 por $P_0 a/\varepsilon_0$ y despejamos Q, obteniendo

$$Q = \frac{6\pi L P_0 a}{\ln 3}$$

Sustituyendo en la expresión para el campo eléctrico y agrupando términos, queda

$$\vec{E}(r) = \frac{P_0}{\varepsilon_0} \left(-1 + \frac{3a}{r \ \ln 3} \right) \hat{e}_r \quad a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

de donde

$$\boxed{\vec{E}(r = 2a) = \frac{P_0}{\varepsilon_0} \left(-1 + \frac{3}{2 \ln 3} \right) \hat{e}_r}$$

Problema 5

En régimen, no circula corriente por los condensadores, por lo que tampoco circula corriente por la resistencia R_2, lo que implica que la diferencia de potencial entre sus bornes es cero. Como R_2 está en paralelo con C_4 y C_3, deducimos que $U_3 = 0$. Aplicando la ley de mallas, $V = V_1 + V_2 = Q/C_1 + Q/C_2 = Q/(2C) + 2Q/C = 5Q/(2C)$, donde hemos usado que al estar en serie, C_1 y C_2 tienen la misma carga Q. Resulta $U_1 = Q_1^2/(2C_1) = CV^2/25$, por lo que

$$\boxed{U_1 = \frac{CV^2}{25}, \quad U_3 = 0}$$

Problema 6

El sistema se puede pensar como un arreglo de condensadores en parelelo, cada uno con las placas separadas una distancia d, con el área de cada placa igual a $dx\ h$, con dx un ancho infinitesimal. Recordando que la capacidad en paralelo es la suma de las capacidades, y que para un condensador de placas planas de área A separadas una distancia d relleno de material dieléctrico de permitividad ε su capacidad es $\varepsilon A/d$, entonces la capacidad del sistema se puede calcular como:

$$C = \int_0^L \varepsilon(x) \frac{h\ dx}{d} = \frac{h}{d}\left(\varepsilon_0 L + \varepsilon_1 \frac{L^2}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{C = \frac{hL}{d}\left(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \frac{L}{2}\right)}$$

Problema 7

Observamos que por simetría los campos $(\vec{J}, \vec{E}, \vec{D})$ son radiales. Integramos la ecuación de continuidad, $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, en una esfera de radio r concéntrica con la esfera de radio R_0, obteniendo

$$J = -\frac{1}{4\pi r^2}\frac{dQ}{dt}.$$

Por otra parte, de la ley de gauss para el desplazamiento eléctrico, $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$, resulta

$$D = \frac{1}{4\pi r^2} Q$$

Utilizando las relaciones constitutivas del medio en cuestión, es decir, $D = \varepsilon E$ y $J = gE$, y sustituyendo en las ecuaciones anteriores, obtenemos la ecuación diferencial $Qg/\varepsilon = -\frac{dQ}{dt}$, cuya solución es:

$$Q(t) = Q_0 e^{-gt/\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{J}(r,t) = Q_0 \frac{g}{\varepsilon}\frac{e^{-gt/\varepsilon}}{4\pi r^2}\hat{e}_r}$$

Problema 8

Utilizamos un SC cilíndricas con origen en la intersección de los planos. Suponemos que no hay dependencia radial de los campos. La región de interés es

$$\theta \in [\theta_0 + \theta_1, \pi/2], x = 0, y \in (0, \infty).$$

La solución de la ecuación de Laplace en esta región con las hipótesis supuestas es de la forma

$$V(\theta) = a\theta + b,$$

con las constantes a y b a determinar. Notar que el campo en la región de interés es independiente del campo en las otras regiones, porque el potencial en las placas en $\theta = \theta_0 + \theta_1$ y en $\theta = \pi/2$ está impuesto externamente. Las CB son:

- $V(\theta_0 + \theta_1) = V_0$,
- $V(\pi/2) = 0$,

a partir de las cuales despejamos a y b, deduciendo que

$$V(\theta) = \frac{V_0(\theta - \pi/2)}{\theta_0 + \theta_1 - \pi/2}.$$

La densidad de carga en la placa situada en $\theta = \pi/2$ se puede hallar con la condición de borde del campo eléctrico en dicha placa (en la región exterior, $\theta > \pi/2$, el campo eléctrico es nulo):

$$(-\nabla V)_{|\theta=\pi/2} \cdot (-\hat{e}_\theta) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \left(+ \frac{1}{r} \frac{V_0}{\theta_0 + \theta_1 - \pi/2} \right)_{|\theta=\pi/2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma(y) = \frac{V_0 \varepsilon_0}{y\,(\theta_0 + \theta_1 - \pi/2)}}$$