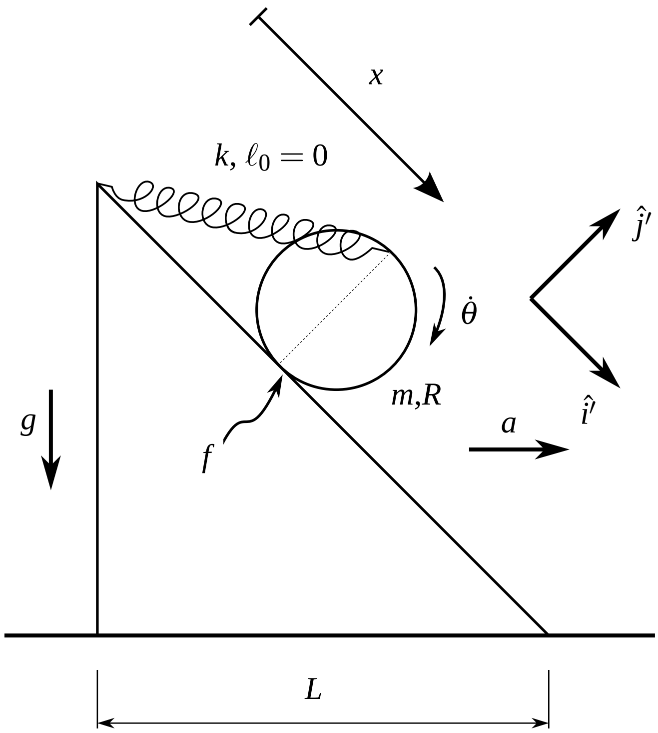
Solución Segundo Parcial de julio de 2010

Mecánica Newtoniana

Ejercicio 1



Parte 1:

Llamemos x a la distancia entre el extremo superior de la placa y el punto de contacto entre disco y placa. Aplicando la primera cardinal al disco, desde un sistema solidario a la placa, obtenemos:

$$\begin{cases} \hat{i}') & \frac{mg}{\sqrt{2}} - T - kx - \frac{ma}{\sqrt{2}} = 0 \\ \hat{j}') & N - 2kR - \frac{ma}{\sqrt{2}} - \frac{mg}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$$

donde N es la normal de la placa sobre el disco y T es la fuerza de rozamiento.

$$\Rightarrow \boxed{N = 2kR + \frac{ma}{\sqrt{2}} + \frac{mg}{\sqrt{2}} = \frac{m}{\sqrt{2}}(2a+g) > 0} \quad \checkmark$$

Aplicando la segunda cardinal en el centro de masas del disco:

$$\hat{k}) \quad T = kx \Rightarrow x = \frac{m}{2\sqrt{2}k}(g-a) = \frac{L}{2\sqrt{2}}$$

Para que el disco no entre en contacto con el piso, se debe verificar:

$$x < \sqrt{2}L - Rtg\left(\frac{\pi/4}{2}\right)$$

es decir:

$$L > \frac{2\sqrt{2}}{3}Rtg\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Imponiendo que la fuerza de rozamiento sea estática ($|\vec{T}| \leq f|\vec{N}|$), llegamos a:

$$\boxed{f_{min} = f_1 = \frac{g-a}{2(2a+g)}}$$

Parte 2:

Aplicando la primera cardinal, llegamos a:

$$\begin{cases} \hat{i}') & \frac{mg}{\sqrt{2}} - T - \frac{ma}{\sqrt{2}} = m\ddot{x} \\ \hat{j}') & N - \frac{ma}{\sqrt{2}} - \frac{mg}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow N = \frac{m}{\sqrt{2}}(a+g) \end{cases}$$

La segunda en el centro de masa del disco, nos da ahora: $T = \frac{mR\ddot{\theta}}{2}$.

Supongamos que el disco rueda sin deslizar. Usando distribución de velocidades, llegamos a que $\dot{x} = R\dot{\theta}$, lo que implica que $T = \frac{m\ddot{x}}{2}$. Sustituyendo en la primera cardinal en la dirección $\hat{i}'$, obtenemos $T = \frac{m}{3\sqrt{2}}(g-a)$. Imponiendo que el rozamiento sea estático, llegamos a:

$$\frac{m}{3\sqrt{2}}(g-a) \leq f\frac{m}{\sqrt{2}}(a+g) \Rightarrow f \geq \frac{g-a}{3(g+a)} = f_2$$

Como $f_2 < f_1$, comprobamos la suposición de rodadura sin deslizamiento. La aceleración angular del disco vale:

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{\sqrt{2}(g-a)}{3R}}$$

Ejercicio 2

Parte 1:

La componente según el eje de giro de la placa del momento angular con respecto al punto O del sistema compuesto por la placa y la barra se conserva. Esto es debido a que ese punto tiene velocidad nula para ambos rígidos y el momento externo neto que se ejerce sobre dicho sistema tiene componente nula en esa dirección. Además, las fuerzas no conservativas que se ejercen sobre dicho sistema no trabajan, por lo que se conserva la energía mecánica del mismo.
El momento angular del sistema con respecto al punto O está dado por

$$\overrightarrow{L}_o = \overrightarrow{L}_o^{placa} + \overrightarrow{L}_o^{barra} \tag{1}$$

Para describir la configuración del sistema utilizamos los ángulos θ y ϕ, siendo θ el ángulo que mide el giro de la placa con respecto a una referencia arbitraria y ϕ el ángulo que describe el giro de la barra en el plano de la placa, medido con respecto a la vertical.
Se utilizan de aquí en más las bases de versores móviles $(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$ y $(\hat{e}_r,\hat{e}_\phi,\hat{k})$, siendo $(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$ solidarios a la placa con $\hat{j}$ en la dirección del eje de giro y $\hat{k}$ perpendicular al plano de la placa. La base $\hat{e}_r, e_\phi, \hat{k}$ es solidaria a la barra siguiendo la convención usual, con la salvedad de que el sentido de ϕ se toma de manera tal que $\hat{e}_\phi \wedge \hat{e}_r = \hat{k}$.
La componente del momento angular de la placa según la dirección $\hat{j}$ es:

$$\overrightarrow{L}_o^{placa}.\hat{j} = \frac{Ma^2}{3}\dot{\theta} \tag{2}$$

La velocidad angular de la barra es:

$$\overrightarrow{\omega} = \dot{\theta}\hat{j} - \dot{\phi}\hat{k} = \dot{\theta}(cos\phi\hat{e}_r - sin\phi\hat{e}_\phi) - \dot{\phi}\hat{k} \tag{3}$$

El tensor de inercia de la barra con respecto a O en la base $\hat{e}_\phi, \hat{e}_r, \hat{k}$ es:

$$\mathbf{I}_o^{\{\hat{e}_\phi,\hat{e}_r,\hat{k}\}} = \begin{pmatrix} \frac{mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{pmatrix} \tag{4}$$

El momento angular de la barra queda entonces:

$$\overrightarrow{L}_o^{barra} = -sin\phi\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\hat{e}_\phi - \dot{\phi}\frac{mL^2}{3}\hat{k} \tag{5}$$

La componente vertical del momento angular del sistema, una de las cantidades conservadas, es:

$$\overrightarrow{L}_o.\hat{j} = \frac{Ma^2}{3}\dot{\theta} + sin^2\phi\frac{mL^2}{3}\dot{\theta} \tag{6}$$

La otra cantidad conservada es la energía mecánica del sistema, que en este caso coincide con su energía cinética:

$$E = \frac{Ma^2}{3}\frac{\dot{\theta}^2}{2} + sin^2\phi\frac{mL^2}{3}\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{mL^2}{3}\frac{\dot{\phi}^2}{2} \tag{7}$$

Partes 2 y 3:

Imponiendo las condiciones iniciales, se obtiene el valor de ambas cantidades conservadas en el instante inicial:

$$\overrightarrow{L}_o.\hat{j}|_{t=0} = \frac{Ma^2\Omega_o}{3} \tag{8}$$

$$E|_{t=0} = \frac{Ma^2\Omega_o^2}{6} \tag{9}$$

Igualando estas expresiones al valor de dichas cantidades conservadas en el instante en que $\phi = \frac{\pi}{2}$ se obtiene:

$$\dot{\theta}|_{\phi=\pi/2} = \Omega_o \frac{Ma^2}{Ma^2 + mL^2} \tag{10}$$

$$\dot{\phi}^2|_{\phi=\pi/2} = \Omega_o^2 \frac{Ma^2}{Ma^2 + mL^2} \tag{11}$$

Ejercicio 3

Parte 1:

En primer lugar, consideramos la segunda cardinal, en el centro del aro, aplicada al sistema de las masas y la barra.

$$\frac{d\left(\mathbb{I}_O \vec{\omega}\right)}{dt} = \mathscr{M}_O^{ext} \qquad \text{Teniendo en cuenta que } \vec{a}_O = 0 \tag{12}$$

Observar que si proyectamos la ecuación (12) en la dirección perpendicular al plano de la guía, el único momento presente es realizado por el peso.

$$\frac{d\left(\mathbb{I}_O \vec{\omega}\right)}{dt} \cdot \hat{u}_3 = \mathscr{M}_O^{ext} \cdot \hat{u}_3 = -mgR\,sen(\theta) \quad \text{Donde } \hat{u}_3 \text{ es perpendicular al plano del aro} \tag{13}$$

Planteamos el tensor de inercia para el rígido y la velocidad angular en una base solidaria al mismo. Luego derivamos $\mathbb{I}_O\,\vec{\omega}$ y proyectamos en la dirección $\hat{u}_3$ obteniendo:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\Omega^2 cos(\theta)\,sen(\theta) + \frac{g}{2R}\,sen(\theta) = 0} \tag{14}$$

Parte 2:

Para encontrar las posiciones de equilibrio relativo, buscamos los ángulos para los cuales se satisface la ecuación (14) con $\ddot{\theta} = 0$, entonces:

$$sen(\theta)\left[\frac{1}{2}\Omega^2 cos(\theta) + \frac{g}{2R}\right] = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} sen(\theta) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\theta = 0}\,\boxed{\theta = \pi} \\ \boxed{cos(\theta) = -\dfrac{g}{R\Omega^2}}\,\exists \;\Leftrightarrow\; \Omega^2 > \dfrac{g}{R} \end{cases} \tag{15}$$