CAPÍTULO VII - DINÁMICA DEL RÍGIDO

Ecuaciones cardinales

En el caso de un cuerpo rígido las ecuaciones fundamentales para un sistema de partículas describen completamente el movimiento del cuerpo. Dada la posición del rígido en un instante, la velocidad de uno de sus puntos y la velocidad angular, las ecuaciones cardinales determinan completamente el movimiento posterior del cuerpo.
La primera ecuación cardinal permite describir el movimiento del centro de masas del rígido.

$$M\ddot{\vec{r}}_G = \vec{R}^{(e)}$$

Para escribir la segunda cardinal conviene recordar la expresión del momentum angular

$$\vec{L}_Q = \mathrm{II}_Q\vec{\omega} + M(\vec{r}_G - \vec{r}_Q) \times \vec{v}_Q$$

donde $\vec{v}_Q$ era la velocidad de un punto del rígido, $\vec{\omega}$ su velocidad angular y II_Q el tensor de inercia.

En el caso en que el punto Q es solidario al rígido, la segunda ecuación cardinal toma entonces la forma

$$\left.\frac{d(\mathrm{II}_Q\vec{\omega})}{dt}\right|_F + M(\vec{r}_G - \vec{r}_Q) \times \vec{a}_Q = \vec{M}_Q^{(e)}$$

donde $\vec{a}_Q$ es la aceleración del punto Q. Las derivadas respecto del tiempo se toman respecto del sistema inercial, supuesto fijo. Recuérdese que por lo general se trabaja expresando el tensor de inercia en un sistema solidario o en un sistema intermedio. Si se trabaja en un sistema solidario, para calcular $\mathrm{II}_Q\vec{\omega}$ se debe expresar la velocidad angular en dicho sistema y luego recordar que

$$\left.\frac{d(\mathrm{II}_Q\vec{\omega})}{dt}\right|_F = \left.\frac{d(\mathrm{II}_Q\vec{\omega})}{dt}\right|_S + \vec{\omega} \times \mathrm{II}_Q\vec{\omega} = \mathrm{II}_Q\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathrm{II}_Q\vec{\omega}$$

En caso de que se tome la segunda cardinal en el centro de masa G se tiene

$$\left.\frac{d(\mathrm{II}_G\vec{\omega})}{dt}\right|_F = \vec{M}_G^{(e)}$$

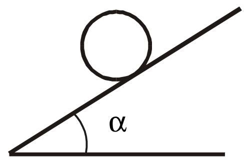
que si se trabaja en el sistema solidario se escribe

$$\mathrm{II}_G\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathrm{II}_G\vec{\omega} = \vec{M}_G^{(e)}$$

La segunda cardinal también toma una forma sencilla si el rígido tiene un punto fijo P. En ese caso,

$$\left.\frac{d(II_P\vec{\omega})}{dt}\right|_F = \vec{M}_P^{(e)} .$$

Ejemplo 1: Calcular la aceleración del centro de masas de un disco de radio R que rueda sin deslizar sobre un plano inclinado de ángulo α.



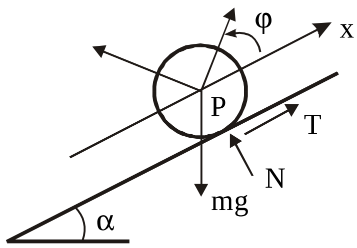
Tomando momentos respecto de G:

$$1^{\underline{era}} \text{ cardinal:} \quad T - Mg\,\text{sen}\,\alpha = M\ddot{x}_G$$

$$2^{\underline{da}} \text{ cardinal:} \quad \vec{M}_G = TR\vec{k} = \frac{1}{2}MR^2\ddot{\varphi}\vec{k}$$

Además se tiene el vínculo $\dot{x}_G + R\dot{\varphi} = 0$, ya que $\vec{v}_P = 0$ (rueda sin deslizar).

$$\Rightarrow \qquad T = \frac{1}{2}MR\ddot{\varphi} = -\frac{1}{2}M\ddot{x}_G .$$



Sustituyendo en la $1^{\underline{era}}$ cardinal

$$T = \frac{1}{3}Mg\,\text{sen}\,\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_G = -\frac{2}{3}g\,\text{sen}\,\alpha$$

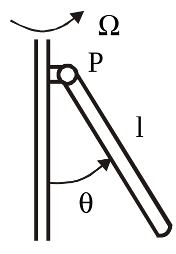
Ejemplo 2: Una barra de longitud *l* y masa M está articulada en un extremo P y gira alrededor de un eje vertical con velocidad angular Ω constante.

a) Determinar la ecuación de movimiento para el ángulo θ que forma la barra con la vertical.

b) Determinar el ángulo θ_0 de equilibrio relativo.

a) Consideremos el sistema de ejes intermedios P, x'y'z' que gira respecto al fijo Pxyz con velocidad angular $\Omega\vec{K} = \dot{\varphi}\vec{K}$. El eje Px' está en el plano horizontal y pertenece a la intersección del mismo con el plano zPG. El eje del sistema solidario Pz'' tiene la dirección de la barra.

Por el teorema de adición de velocidades angulares

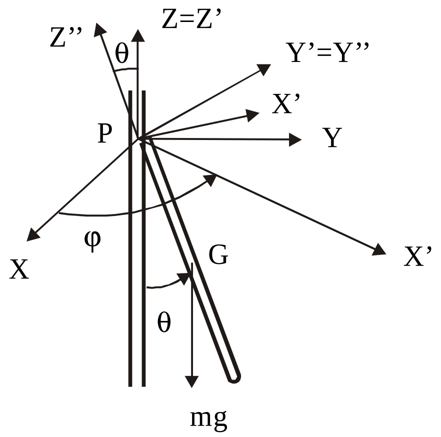


$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{K} - \dot{\theta}\vec{j} = \Omega\vec{K} - \dot{\theta}\vec{j} = \dot{\varphi}\cos\theta\vec{k} + \dot{\varphi}sen\theta\vec{i} - \dot{\theta}\vec{j}$$

$$I_{Pxx} = \frac{M}{l}\int_0^l z^2 dz = \frac{1}{3}Ml^2 = I_{Pyy}$$

$$\mathrm{II}_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}Ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}Ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_P = \frac{1}{3}Ml^2(\dot{\varphi} sen\theta.\vec{i} - \dot{\theta}.\vec{j})$$



es el momento angular respecto de P en los ejes solidarios.
Si se toma la segunda cardinal respecto del punto fijo P

$$\mathrm{II}_P\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\times\mathrm{II}_P\vec{\omega} = \vec{M}_P^{(e)}$$

$$\mathrm{II}_P\dot{\vec{\omega}} = \frac{1}{3}Ml^2(\Omega\dot{\theta}\cos\theta.\vec{i} - \ddot{\theta}.\vec{j})$$

$$\vec{\omega}\times\mathrm{II}_P\vec{\omega} = \frac{1}{3}Ml^2(\dot{\varphi}^2 sen\theta\cos\theta.\vec{j} + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta.\vec{i})$$

La componente $\vec{j}$ de la segunda cardinal da la ecuación buscada

$$\frac{1}{3}Ml^2(-\ddot{\theta} + \dot{\varphi}^2 sen\theta\cos\theta) = Mglsen\theta$$

$$-\ddot{\theta} + \Omega^2 sen\theta\cos\theta = +\frac{3g}{l}sen\theta$$

b) Si $\Omega^2\cos\theta = \frac{3g}{l}$ existe una posición de equilibrio relativo para θ_0 (además de θ_0 = 0):

$$\cos\theta_0 = \frac{3g}{l\Omega^2}$$

Si $\frac{3g}{l\Omega^2} \geq 1$ la posición de equilibrio es sólo $\theta_0 = 0$.

ENERGÍA Y POTENCIA EN SISTEMAS RÍGIDOS

Miremos ahora la ecuación que relaciona la potencia con el ritmo de variación de la energía cinética, en el caso de un cuerpo rígido.
En ese caso, el término

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij}\cdot\vec{v}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij}\cdot(\vec{v}_i - \vec{v}_j)$$

donde hemos usado que $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ y recordando que las fuerzas internas están dirigidas según $\vec{r}_i - \vec{r}_j$, resulta

$$\vec{F}_{ij} \cdot \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0$$

Por consiguiente

$$W = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot \left[\vec{v}_G + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)\right] = \vec{R}^{(e)} \cdot \vec{v}_G + \vec{\omega} \cdot \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_i^{(e)} =$$

$$= \vec{R}^{(e)} \cdot \vec{v}_G + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_G^{(e)} = \frac{dT}{dt}$$

Recordando la expresión obtenida para la energía cinética de un rígido resulta

$$\frac{dT}{dt} = m\vec{v}_G \cdot \frac{d\vec{v}_G}{dt} + \vec{\omega} \cdot \mathrm{II}_G \dot{\vec{\omega}}$$

y por lo tanto la relación entre la potencia temporal de la energía cinética es consecuencia de las ecuaciones cardinales y no agrega nueva información.
Es inmediato comprobar que

$$W = \vec{R}^{(e)} \cdot \vec{v}_o + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_o$$

La potencia tiene la misma forma sin importar qué punto del rígido se considere.

CAPÍTULO VIII - ESTÁTICA DE SISTEMAS RÍGIDOS

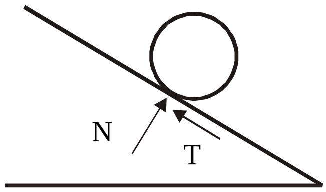
SISTEMAS VINCULADOS Y ESTÁTICA

Vimos que las fuerzas que actúan sobre un sistema se podían clasificar en internas y externas. Existe otra clasificación a la cual conviene que hagamos referencia en este momento. Se dice que una fuerza es vincular si proviene de la acción de algún vínculo. Por ejemplo, en el caso de un aro rugoso que rueda sin deslizar sobre un plano inclinado hay dos vínculos.

1. El disco no puede penetrar en el plano, es decir, $d_G \geq R$ (d_G es la distancia al plano del centro de masas).
2. El disco rueda sin deslizar, es decir que el punto de contacto tiene velocidad nula.

De acuerdo con el llamado principio de liberación de los vínculos que enunciaremos a continuación, cada vínculo puede sustituirse por un cierto sistema de fuerzas. En el ejemplo,

1. $N \geq 0$
2. $|T| \leq \mu_e N$



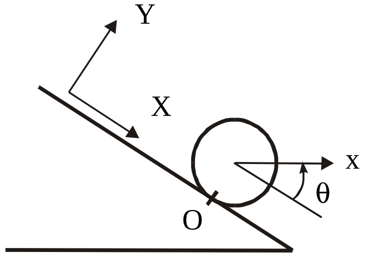
donde μ_e es el coeficiente de fricción estática, T y N son las fuerzas vinculares.

Vamos a enunciar dos principios que son constantemente usados en mecánica aunque en general no son enunciados explícitamente. La razón por la cual es necesario introducirlos es debido a que las nociones de cuerpo rígido y vínculo son producto de idealizaciones. Si uno trabajase con las partículas elementales que componen dichos cuerpos y las fuerzas fundamentales que imponen restricciones a su movimiento, estos principios no serían necesarios.

Recordemos que se llama vínculo a toda restricción al movimiento de un sistema. Por ejemplo, un rígido es un sistema vinculado, ya que dado un par de sus puntos P y Q, $(\mathbf{r_P} - \mathbf{r_Q})^2 =$ cte. independientemente del tiempo. Sabemos que estos vínculos reducen el número de grados de libertad (que en principio serían infinitos en un sistema continuo) a seis coordenadas independientes. Cuando un vínculo se puede expresar como una función de las coordenadas y el tiempo: $f(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, ..., \mathbf{r_N}, t) = 0$, se llama holónomo. Los vínculos del rígido son holónomos. Un ejemplo de vínculo no holónomo es un gas contenido en una caja. En este caso los vínculos se expresan por un conjunto de desigualdades:

$$0 \leq r_i^{\alpha} \leq d^{\alpha},\ \alpha = 1, 2, 3.$$

Volvamos al ejemplo ya mencionado de disco que se mueve sobre un plano inclinado. En principio, para describir el movimiento de un rígido en un plano se necesitan tres coordenadas, dos para el centro de masas y el ángulo de rotación. Si el disco permanece apoyado sobre el plano inclinado, y = R, y además la condición de rodadura impone $v_o = 0$,



$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_O)$$

$$\dot{x}.\vec{I} = \dot{\theta}.\vec{K} \wedge R.\vec{J} = -R.\dot{\theta}.\vec{I}$$

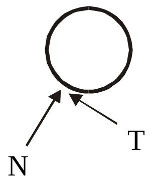
$$\dot{x} + R.\dot{\theta} = 0$$

por lo que el sistema tiene dos vínculos holónomos y un solo grado de libertad.

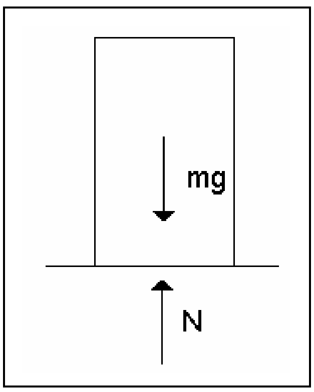
El *principio de liberación* establece que los vínculos se pueden sustituir por fuerzas. Explícitamente dice:

- Dado un sistema físico S con ciertas condiciones iniciales C.I., sometido a ciertos vínculos V’ V’’ y a un sistema de fuerzas *F*; dicho sistema tiene la misma evolución que el sistema *S* con condiciones iniciales C.I. sometido a las fuerzas $F \cup F$(V’) y a los vínculos V’’.

Por ejemplo, en el caso del rígido circular que rueda sin deslizar, se puede pensar como un sistema de partículas sometido a los vínculos de rigidez, de apoyo sobre el plano y a los de rodadura. El principio de liberación dice que podemos sustituir parte de los vínculos por fuerzas vinculares.



- El *principio de pasividad de los vínculos* dice que si existe un sistema de reacciones vinculares *F’*(V’) compatibles con el movimiento y con los vínculos, entonces el movimiento del sistema será tal que permanece vinculado.



Aplicamos explícitamente el principio cuando igualamos la reacción del piso sobre el cuerpo apoyado N = mg, y desechamos la posibilidad de que N > mg.

Veremos un caso más interesante de aplicación de este principio al estudiar el vuelco de un rígido.

ESTÁTICA

Para que la posición de un cuerpo sea de equilibrio debe cumplirse que el cuerpo colocado en reposo en esa posición permanezca en reposo para todo tiempo posterior. Por lo tanto, en una posición de equilibrio los términos cinéticos de las ecuaciones cardinales deben anularse, es decir,

$$\vec{R}^{ext} = 0, \vec{M}_O^{ext} = 0$$

Como $\vec{M}_p^{(ext)} = \vec{M}_o^{(ext)} + \vec{R}^{(ext)} \wedge (\vec{r}_p - \vec{r}_o)$, el momento de las fuerzas externas respecto de cualquier punto debe anularse. Recíprocamente, si $\mathbf{R}^{ext} = 0$ entonces $\mathbf{a}_G = 0$, la aceleración del centro de masas es nula, de modo que si el cuerpo se coloca inicialmente en reposo, se cumplirá $\mathbf{v}_G = 0$ para todo tiempo, por lo que el centro de masas permanecerá en reposo. Además, como $\mathbf{M_O}^{ext} = 0$,

$$0 = \vec{M}_G^{ext} = II_G\ \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge II_G\ \vec{\omega} = II_G\ \dot{\vec{\omega}}$$

ya que $\boldsymbol{\omega} = 0$ inicialmente.

Por lo tanto, $II_G\ \dot{\vec{\omega}} = 0$ y en un sistema de ejes principales se cumple

$$\begin{pmatrix} I_x \dot{\omega}_x \\ I_y \dot{\omega}_y \\ I_z \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = 0$$

donde los I son los momentos principales de inercia. Si los tres momentos son no nulos será $\boldsymbol{\omega} = 0$ para todo tiempo. Si uno de los momentos principales es nulo (por ejemplo I_x), ω_x podría ser no nulo, pero en ese caso $\Sigma\ m_i\ (y_i^2 + z_i^2) = 0$, lo que implica que todos los puntos del rígido están sobre el eje Gx. En ese caso el rígido es una barra infinitamente delgada orientada según Gx y la rotación de la barra alrededor de dicho eje es irrelevante.

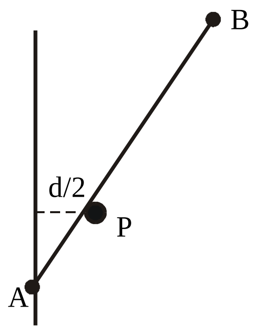
Por consiguiente, la condición necesaria y suficiente para que un rígido se encuentre en una posición de equilibrio es que se anulen la resultante y el momento respecto a un punto arbitrario de las fuerzas externas.

Ejemplo 1: Una barra AB de longitud 2d y masa M esta apoyada en un punto P que dista d/2 de una pared vertical. El extremo A de la barra se apoya en la pared vertical.

a) Suponiendo que no hay fricción entre la barra y la pared determinar el ángulo φ de equilibrio.

b) Suponiendo ahora que hay fricción, determinar el mínimo coeficiente μ para que $\varphi = \pi/4$ sea una posición de equilibrio.

$$\vec{R}^{(e)} = 0$$



implica

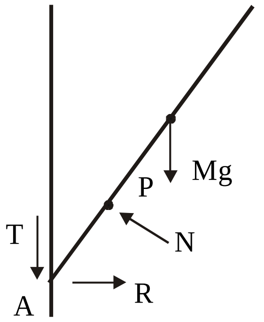
$$N\,\mathrm{sen}\,\varphi - T = Mg \qquad 1)$$

$$N\cos\varphi - R = 0 \qquad 2)$$

$$\mathbf{M}_A^{(e)} = 0$$

implica

$$Nd_{PA} - Mgd\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0 \qquad 3)$$



$$d_{PA}\,\mathrm{sen}\,\varphi = d/2 \quad \Rightarrow \quad \frac{Nd}{2\,\mathrm{sen}\,\varphi} = Mgd\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

es decir, $N = 2Mg\,\mathrm{sen}^2\varphi$

1) $\Rightarrow \quad T = -Mg(1 - 2\,\mathrm{sen}^3\varphi)$

2) $\Rightarrow \quad R = 2Mg\,\mathrm{sen}^2\varphi\cos\varphi$

Caso a) Si no hay fricción, *T= 0*

$$\mathrm{sen}^3\varphi = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \varphi = Ar\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$\varphi \approx 52{,}5^0 \approx 0{,}91 rad$

Se debe verificar además que $R \geq 0$, lo que se cumple para $\pi/2 \geq \varphi \geq 0$.

Caso b)

$$|T| \leq \mu R$$

$$\left|1 - 2\,\mathrm{sen}^3\varphi\right| \leq 2\mu\,\mathrm{sen}^2\varphi\cos\varphi$$

$\varphi = \pi/4 \Rightarrow 1 - 1/\sqrt{2} \leq \mu\sqrt{2}/2 \Rightarrow \mu \geq \sqrt{2} - 1$

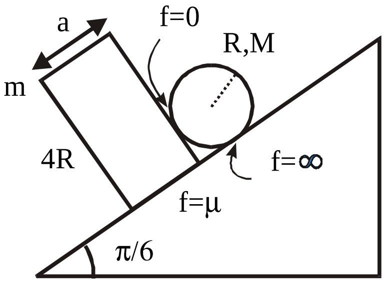
Obsérvese que si μ es menor que $\sqrt{2} - 1$ el equilibrio se rompería con la barra deslizando hacia abajo.

Ejemplo 2: Un disco de radio *R* y masa *M* esta apoyado sobre una placa rectangular de base *a* y altura *4R* con masa *m*. No hay fricción entre disco y placa.

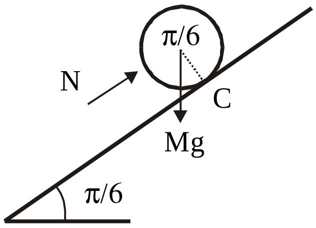
a) Determinar el mínimo valor de a para el cual es posible el equilibrio.

b) Determinar el mínimo coeficiente de fricción entre placa y plano inclinado compatible con el equilibrio.

c) ¿Qué ocurre si *m=2M*, *μ=0,8* y *a=2R?*



Equilibrio del disco: Para no tomar en consideración las fuerzas en el punto de contacto del disco con el plano imponemos

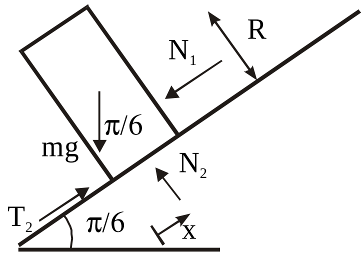


$$M_C = 0 - NR + MgR \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 0$$

$$N_1 = \frac{Mg}{2}$$

Equilibrio de la placa: El principio de pasividad de los vínculos asegura que si es posible aplicar la normal N_1 en algún punto de la base de modo que haya equilibrio, éste no se romperá.

La ecuación $\vec{R}^{(e)} = 0$ implica



$$\mathrm{mg}\operatorname{sen}30 + \frac{\mathrm{Mg}}{2} = \mathrm{T}_2$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{T}_2 = \frac{(\mathrm{m}+\mathrm{M})\mathrm{g}}{2}$$

$$\mathrm{mg}\cos 30 = \mathrm{N}_2 = \mathrm{mg}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{o}}^{(\mathbf{e})} = 0 \Rightarrow \mathrm{N}_2\mathrm{x} - 2\mathrm{Rmg}\operatorname{sen}30 - \frac{\mathrm{a}}{2}\mathrm{mg}\cos 30 + \frac{\mathrm{Mg}}{2}\mathrm{R} = 0$$

a) Habrá equilibrio si $0 \leq x \leq a$

$$x = \frac{M+2m}{m\sqrt{3}}R \quad \Rightarrow \quad \frac{M+2m}{m\sqrt{3}} \leq \frac{a}{R}$$ es la condición para que no vuelque.

b) Para que no deslice

$$\frac{m+M}{2} \leq \mu m \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) Si $a=2R$ y $m=2M$ no hay vuelco y hay deslizamiento.

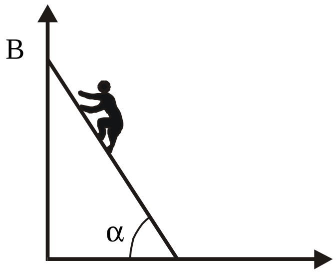
Ejemplo 3: *Un caso hiperestático*. Una escalera de longitud 2*l* y masa *m* esta apoyada sobre el piso con coeficiente de fricción μ_1= 0,4 y sobre la pared con coeficiente μ_2= 0,2 y forma un ángulo α con la horizontal. Un pintor de masa *M=2m* está subiendo por la escalera y se encuentra a una distancia *d* del piso.

Determinar el máximo ángulo α que permitiría al pintor subir hasta el extremo de la escalera sin que ésta deslice.

$$\mathbf{R}^{(e)} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 + T = (M+m)g$$

$$N = T_1 \qquad T_1 \geq 0$$

$$\mathbf{M}_A^{(e)} = 0 \quad \Rightarrow \quad mgl\cos\alpha + Mgd\cos\alpha - N2l\operatorname{sen}\alpha - T2l\cos\alpha = 0$$

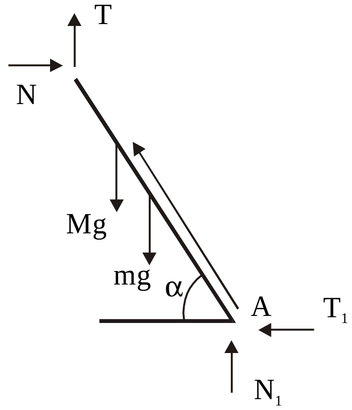


$$\frac{mg}{2}+\frac{Mgd}{2l}-N\,\mathrm{tg}\,\alpha-T=0 \qquad \textbf{(*)}$$

Observe que tenemos tres ecuaciones y cuatro incógnitas y las fuerzas no quedan determinadas por las ecuaciones del equilibrio. Se dice en este caso que el sistema es hiperestático.

Resolvamos primero el caso llamado isostático en que el coeficiente de rozamiento entre escalera y pared es nulo.

$$T_1 = N$$
$$N_1 = 3mg$$
$$\frac{mg}{2}\left(1+\frac{2d}{l}\right)-N\,\mathrm{tg}\,\alpha=0$$
$$N_1=\frac{mg}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}\left(1+\frac{2d}{l}\right)$$



Como $T_1=N \geq 0$

$T_1 \leq 0{,}4\ (3mg) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha \geq \dfrac{1+d/2}{6x(0{,}4)}$

el caso más restrictivo es cuando el pintor ocupa la posición más alta $d=2l$

$$tg\alpha \geq 25/12$$

Miremos ahora el **caso hiperestático** con $d=2l$

La ecuación **(*)** implica, usando M=2m,

$$T=\frac{5mg}{2}-tg\alpha N$$

Las demás reacciones, en términos de N nos quedan:

$$N_1=\frac{mg}{2}+tg\alpha N$$
$$T_1 = N$$

Las condiciones de equilibrio son:

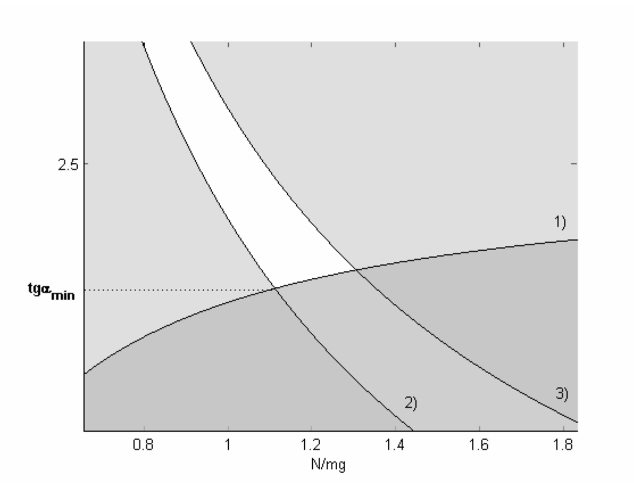
$$T_1 \leq \mu_1 N_1$$
$$|T| \leq \mu_2 N$$

Que implican las siguientes desigualdades:

1) $tg\alpha \geq \frac{1}{\mu_1} - \frac{mg}{2N}$

2) $tg\alpha \geq \frac{5mg}{2N} - \mu_2$

3) $tg\alpha \leq \frac{5mg}{2N} + \mu_2$



En un gráfico con N como abcisa, la ecuación 1) nos dice que los valores admisibles de $tg\alpha$ están por encima de $\frac{1}{\mu_1} - \frac{mg}{2N}$, la 2) que están por encima de $\frac{5mg}{2N} - \mu_2$ y la 3) que están por debajo de $\frac{5mg}{2N} + \mu_2$ (las zonas excluidas están en sombreado en el gráfico). La región de parejas admisibles $(N, tg\alpha)$ tiene un extremo inferior que corresponde a la intersección de 1) y 2) y define al mínimo valor posible para la $tg\alpha$:

$$tg\alpha_{\min} = \frac{5 - \mu_1\mu_2}{6\mu_1} = \frac{41}{20}$$

Existe una forma geométrica alternativa de tratar los problemas hiperestáticos. Está basada en el concepto de sistemas de fuerzas equipolentes. Se dice que dos sistemas son equipolentes si tienen igual resultante e igual momento respecto de un punto. Como en las ecuaciones cardinales sólo aparecen la resultante y el momento total respecto de un punto, dos sistemas equipolentes tienen el mismo efecto físico.

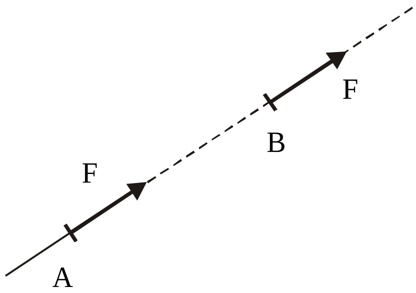
Reducir un sistema es sustituirlo por otro, más simple, equipolente al primero.

Un par de fuerzas está constituido por dos fuerzas cuyas líneas de acción son paralelas y que tienen la misma magnitud y sentidos opuestos. Un par tiene resultante nula y momento respecto a un punto cualquiera **M** cuya magnitud es igual a *Fa*.

Dos pares con el mismo momento son equipolentes.

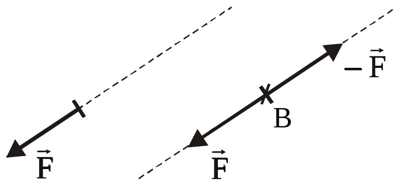
Todo sistema de fuerzas se puede reducir a una fuerza aplicada en un punto arbitrario O y a un par. En efecto dado un sistema de fuerzas S con resultante $\vec{R}$ y momento total respecto de $O = \vec{M}_o$, dicho sistema es equivalente al sistema S' con una fuerza R aplicada en O y un par cualquiera con momento M_o.
Un sistema S de fuerzas F_i aplicadas en los puntos P_i se puede reducir gráficamente a una fuerza y un par usando los siguientes propiedades:

1) Si las fuerzas se desplazan a lo largo de sus líneas de acción dan lugar a sistemas equipolentes.



En efecto, es inmediato probar que $\vec{F}$ aplicada en A tiene el mismo momento respecto a un punto cualquiera que F aplicada en B.

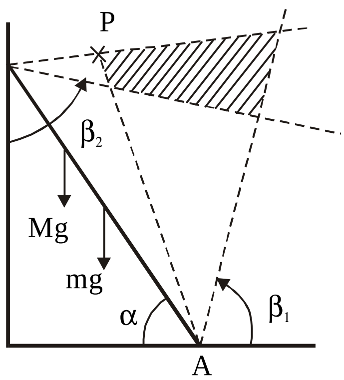
2) Una fuerza aplicada en A es equivalente a una aplicada en otro punto cualquiera B más un par. Es inmediato a partir de la figura.



3) Un sistema formado por pares equipolentes a un solo par con momento igual a la suma vectorial de los momentos de cada par. Trivial, ya que ambos sistemas tienen igual resultante (nula) e igual momento respecto a cualquier punto.

Volviendo al ejemplo de la escalera

La fuerza total en el piso apunta en una dirección comprendida entre $\mathrm{tg}(\beta_2 - \pi)$ y $\mathrm{tg}(-\beta_2 + \pi)$, con $\cot \mathrm{g}\beta_2 = \mu_1$.



La resultante de las fuerzas reactivas en el piso y la pared tendrá un punto de aplicación en el interior de la zona rayada y debe apuntar según la vertical hacia arriba. Su momento respecto a A sea máximo cuando el punto de aplicación se desplace hasta P de coordenadas (x_p, y_p). Es fácil ver que las rectas

$$y = -\frac{5}{2}\alpha + \frac{5}{2}2l.\cos\alpha$$

$$y = -\frac{1}{5}\alpha + 2l.\cos\alpha$$

se cortan en $x_p = \frac{20}{27} l.\cos\alpha\left(\frac{5}{2} - \mathrm{tg}\,\alpha\right)$. Tomando momentos respecto de A resulta

$$2mgd.\cos\alpha + mgl.\cos\alpha - 3mg\left(2l.\cos\alpha - \frac{20}{27}\left(\frac{5}{2} - \mathrm{tg}\,\alpha\right)\right) = 0$$

para el caso extremo d=2l.

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{123}{60}$$