CAPÍTULO VI

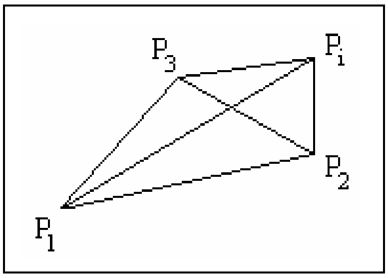
CINÉTICA DEL RÍGIDO

CINEMÁTICA

Un cuerpo rígido puede considerarse como un sistema de masas puntuales cuyas distancias se mantienen constantes durante el movimiento. Comencemos determinando el número de coordenadas independientes necesarias para especificar su configuración en cualquier instante de tiempo. Dado un par cualquiera de partículas del rígido de las que sabemos que su distancia permanece constante. Es decir,

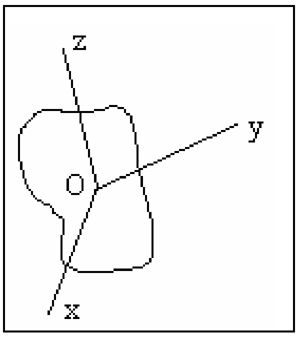
$$d_{ij} = c_{ij} \quad (1)$$

donde las c son constantes. Supongamos que hemos fijado la posición de 3 puntos no colineales $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$. Si deseamos fijar ahora la posición de un punto i cualquiera del rígido, basta con conocer su distancia a los 3 puntos no colineales.



$$\begin{aligned} d_{i1} &= |\vec{r}_i - \vec{r}_1| = c_{i1} \\ d_{i2} &= |\vec{r}_i - \vec{r}_2| = c_{i2} \quad (2) \\ d_{i3} &= |\vec{r}_i - \vec{r}_3| = c_{i3} \end{aligned}$$

Por consiguiente, conocida la posición de los tres puntos $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$, la posición de cualquier otro punto $\vec{r}_i$ que dista c_{i1}, c_{i2} y c_{i3} de los tres puntos queda determinada por la intersección de las tres esferas de radios c_{i1}, c_{i2} y c_{i3} centradas respectivamente en $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$. El número de grados de libertad que hay que fijar para determinar la configuración del rígido no supera nueve, tres grados de libertad par cada punto. Pero ellos no son independientes ya que están vinculados por las ecuaciones (2), lo que permite reducir a seis los grados de libertad requeridos. En efecto, se necesitan tres para fijar el punto P_1; una vez fijado éste, bastan dos coordenadas para fijar P_2 sobre la esfera de radio c_{12} y centro P_1 y finalmente hace falta un ángulo para fijar la posición de P_3 en la circunferencia que resulta de intersectar la esfera de radio c_{13} y centro P_1 con la esfera de radio c_{23} y centro P_2.

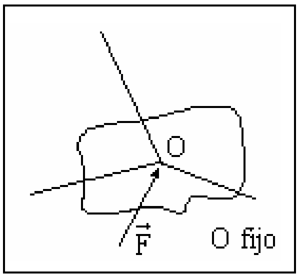


Por consiguiente, un cuerpo rígido queda ubicado en el espacio una vez conocido el valor de seis coordenadas generalizadas.

Otra forma de mostrar esta propiedad es a partir de un sistema de coordenadas solidarias con el rígido. La posición de un punto del rígido con respecto a este sistema permanece constante, sus coordenadas no varían. Por lo tanto basta con ubicar el sistema de coordenadas en el espacio para conocer la posición de cualquier punto del rígido. Para ello se requieren tres coordenadas para fijar el origen del sistema O y tres ángulos que permiten fijar la orientación de los ejes coordenados respecto a un sistema fijo.

Por lo tanto, es necesaria la evolución de seis variables para conocer el movimiento de un punto cualquiera del rígido. Veremos que las seis ecuaciones fundamentales de un sistema de partículas son suficientes para determinar el movimiento de un sólido rígido.

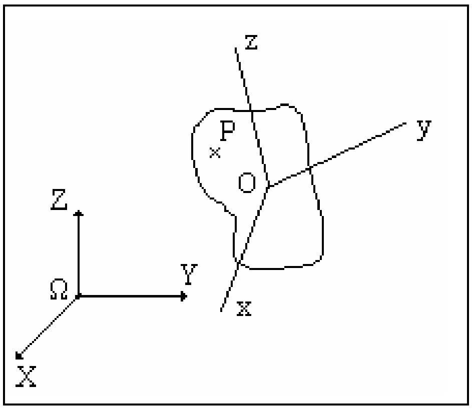
Si el rígido estaba restringido en su movimiento por algún vínculo, el número de variables requerido para determinar el movimiento disminuye. Las restantes ecuaciones fundamentales permitirán determinar el sistema de fuerzas necesario para que dicho vínculo sea respetado.



Por ejemplo, para un sólido con un punto fijo hacen falta solo tres grados de libertad y es posible determinar la fuerza F que ejerce el vínculo.

En ciertos problemas llamados hiperdinámicos el conjunto de fuerzas realizadas por los vínculos no queda únicamente determinado por las ecuaciones fundamentales.

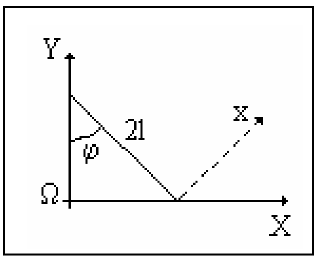
Por definición, la velocidad relativa de un punto cualquiera del rígido respecto a un sistema solidario con él es nula. Por consiguiente, su velocidad respecto a un sistema ΩXYZ estará dada por



$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{\,'} + \vec{v}_{TP}$$
$$\vec{v}_P^{\,'} = 0$$
$$\vec{v}_P = \vec{v}_{TP} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \left(\vec{r}_P - \vec{r}_O \right)$$

Esta relación que hemos obtenido trivialmente de las ecuaciones del movimiento relativo caracteriza la distribución de velocidades de un cuerpo rígido. La velocidad de un punto cualquiera del rígido está determinada por la velocidad de un punto de uno de sus puntos $\vec{v}_O$ y la velocidad angular del sistema solidario $\vec{\omega}$.

<u>Ejemplo 1</u>: Dada una barra de longitud 2l que se mueve de forma tal que los extremos permanecen sobre los ejes de coordenadas (ver figura). Calcular la velocidad de un punto cualquiera de la barra en función del ángulo $\varphi(t)$.



$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k}$$
$$\vec{r}_O = 2l sen\varphi \vec{I}$$
$$\vec{v}_O = 2l \cos\varphi \dot{\varphi} \vec{I}$$
$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \left(\vec{r}_P - \vec{r}_O \right)$$

$\vec{r}_P - \vec{r}_O = \lambda\,\vec{j}\ ,\quad 0 \le \lambda \le 2l$

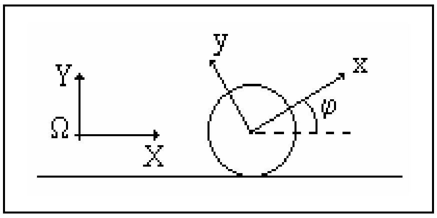
$\vec{v}_P = v_O \vec{I} + \dot{\varphi}\lambda\,\vec{k} \times \vec{j}$

$$\boxed{\vec{v}_P = 2l\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{I} - \lambda\,\dot{\varphi}\,\vec{i}}$$

Es sencillo, si se desea, expresar el resultado en términos de los versores del sistema fijo.

<u>Ejemplo 2</u>: Calcular en función de φ la velocidad del centro de masas de un disco vertical que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal.

Por definición de rodadura $v_p = 0$, $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{K}$.



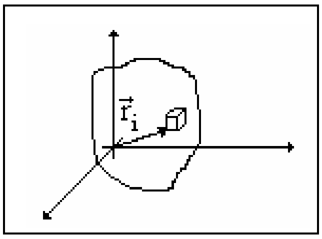
$$\vec{v}_o = \dot{x}\,\vec{i} = \vec{v}_p + \vec{\omega}\times\left(\vec{r}_o - \vec{r}_p\right) = 0 + \dot{\varphi}\vec{K}\times R\vec{J} = -R\,\dot{\varphi}\,\vec{I}$$

$$\boxed{\dot{x} = -R\,\dot{\varphi}}$$

CINÉTICA

En esta sección vamos a desarrollar métodos que nos permitan calcular la cantidad de movimiento total $\vec{P}$, el momentum angular total $\vec{L}$ y la energía cinética T de un cuerpo rígido. Posteriormente, haciendo uso de las ecuaciones fundamentales de un sistema de partículas, deduciremos las ecuaciones del movimiento del cuerpo rígido llamadas ecuaciones cardinales.

Un cuerpo rígido es un sistema continuo de partículas, la generalización del concepto de centro de masas es inmediata:



$$\vec{r}_G = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \rho_i \vec{r}_i \Delta V_i}{\sum_i \rho_i \Delta V_i}$$

expresión que en el límite en que la partición es más y más refinada y los volúmenes tendiendo a cero conduce a

$$\vec{r}_G = \frac{\int_V \rho \vec{r}\, dV}{M}$$

que para ρ constante se reduce a

$$\vec{r}_G = \frac{\int_V \vec{r}\, dV}{V}$$

La cantidad de movimiento total es

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_i m_i \vec{v}_i = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_i \rho_i \vec{v}_i \Delta V_i = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_i \rho_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \Delta V_i = \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{r}\, dV = M \vec{v}_G$$

Para calcular el momentum angular respecto a un punto P comencemos considerando primero el caso de un sistema discreto de partículas rígidamente unidas y luego pasemos al límite continuo. Por definición,

$$\vec{L}_P = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times m_i \vec{v}_i$$

Usando la distribución de velocidades en un cuerpo rígido

$$\vec{L}_P = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times m_i \left(\vec{v}_p + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_P)\right)$$

donde ω es la velocidad angular del rígido y $\vec{v}_P$ la velocidad del punto del rígido que coincide con P en el instante que estamos considerando. Por ejemplo, en el caso de un disco que rueda sin deslizar, si P es el punto de contacto, $\vec{v}_P = 0$.

Podemos reescribir esta expresión en la forma:

$$\vec{L}_P = M(\vec{r}_G - \vec{r}_P)\times\vec{v}_P + \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_P)\times[\vec{\omega}\times(\vec{r}_i - \vec{r}_P)] =$$

$$= M(\vec{r}_G - \vec{r}_P)\times\vec{v}_P + \sum_{i=1}^{N}\left\{m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_P)^2\vec{\omega} - m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_P)[(\vec{r}_i - \vec{r}_P).\vec{\omega}]\right\}$$

Recordando que un producto escalar se escribe en componentes

$$\vec{A}\vec{B} = \sum_{\alpha} A_\alpha B_\alpha$$

el segundo término de $\vec{L}_P$ se puede reescribir en componentes

$$\sum_{\beta}\sum_{i=1}^{N}\left\{m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_P)^2\delta_{\alpha\beta}\omega_\beta - m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_P)_\alpha(\vec{r}_i - \vec{r}_P)_\beta\omega_\beta\right\} = \sum_{\beta}\mathrm{II}_{P\alpha\beta}\omega_\beta$$

donde $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha = \beta \\ 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \end{cases}$ y

$$\boxed{\mathrm{II}_{P\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N}\left\{m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_P)^2\delta_{\alpha\beta} - m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_P)_\alpha(\vec{r}_i - \vec{r}_P)_\beta\right\}}$$

es el llamado tensor de inercia.

Por consiguiente,

$$\boxed{\vec{L}_P = M(\vec{r}_G - \vec{r}_P)\times\vec{v}_P + \mathrm{II}_P\vec{\omega}}$$

El momentum angular del rígido se expresa en términos de los datos cinemáticos $\vec{v}_P$ y $\vec{\omega}$ que dependen del movimiento del rígido y los datos dependientes de la distribución de masas del rígido M, $\vec{r}_G$ y II_P.

Existen dos casos en que la expresión anterior se simplifica. Para P = G, es decir que se toman momentos respecto al centro de masas,

$$\vec{L}_G = \mathrm{II}_G\vec{\omega}$$

Si P es un punto del rígido con velocidad nula

$$\vec{L}_P = \mathrm{II}_P\vec{\omega}$$

Si asumimos que el rígido tiene una distribución continua de materia con densidad ρ y tomamos un sistema de coordenadas con origen en el punto P,

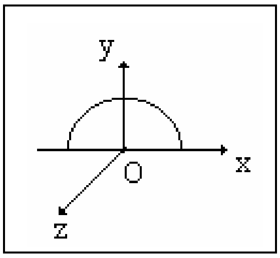
$$\vec{r}_i - \vec{r}_P = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$$

El sistema se supone solidario con el rígido. En ese sistema la matriz de inercia en componentes toma la forma:

$$\mathrm{II}_P = \begin{pmatrix} \int_V \rho\left(y^2+z^2\right)dV & -\int_V \rho xydV & -\int_V \rho xzdV \\ -\int_V \rho xydV & \int_V \rho\left(x^2+z^2\right)dV & -\int_V \rho yzdV \\ -\int_V \rho xzdV & -\int_V \rho yzdV & \int_V \rho\left(x^2+y^2\right)dV \end{pmatrix}$$

y es inmediato comprobar que la matriz de inercia es simétrica.

Ejemplo: Calcular el centro de masas y el tensor de inercia de un semicírculo homogéneo de masa M y radio R.



$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$$
$$z = 0$$

$$\rho = \frac{2M}{\pi R^2}$$

$$x_G = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R r^2 dr \int_0^\pi d\varphi \cos\varphi = 0$$

$$y_G = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R r^2 dr \int_0^\pi d\varphi sen\varphi = \frac{4}{\pi R^2}\frac{R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi}$$

Los componentes I_{xz}, I_{yz} son nulos y $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$. Debemos calcular I_{xx}, I_{yy} e I_{xy}.

El cálculo es totalmente análogo al realizado para calcular las coordenadas del centro de masas y conduce a

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}MR^2 \qquad I_{xy} = 0$$

por lo que la matriz de inercia respecto al centro O es diagonal. Veremos luego que por razones de simetría era de esperar esta forma de la matriz de inercia.

Antes de discutir las propiedades de la matriz de inercia, pasemos al cálculo de la energía cinética de un sólido rígido.

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\vec{v}_P+\vec{\omega}\times\left(\vec{r}_i-\vec{r}_p\right)\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}M\vec{v}_P^{\,2}+\vec{v}_P.\vec{\omega}\times\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\vec{r}_i-\vec{r}_p\right)+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left[\vec{\omega}\times\left(\vec{r}_i-\vec{r}_P\right)\right]^2$$

Usando que $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)^2=A^2B^2sen^2\alpha=A^2B^2-\left(\vec{A}.\vec{B}\right)^2$ se puede escribir el último sumando como

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left[\vec{\omega}\times\left(\vec{r}_i-\vec{r}_P\right)\right]^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left[\omega^2\left(\vec{r}_i-\vec{r}_P\right)^2-\left(\vec{\omega}\cdot\left(\vec{r}_i-\vec{r}_P\right)\right)^2\right]$$

y tomando en cuenta que $\omega^2=\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha\omega_\alpha=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\omega_\alpha\delta_{\alpha\beta}\omega_\beta$

y $\vec{\omega}\cdot\left(\vec{r}_i-\vec{r}_P\right)=\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha\left(\vec{r}_i-\vec{r}_P\right)_\alpha$ se obtiene

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left[\vec{\omega}\times\left(\vec{r}_i-\vec{r}_P\right)\right]^2=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\omega_\alpha\left\{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left[\left(\vec{r}_i-\vec{r}_P\right)^2\delta_{\alpha\beta}-\left(\vec{r}_i-\vec{r}_P\right)_\alpha\left(\vec{r}_i-\vec{r}_P\right)_\beta\right]\right\}\omega_\beta=$$

$$=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\frac{1}{2}\omega_\alpha \mathrm{II}_{P\alpha\beta}\omega_\beta=\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\mathrm{II}_P\cdot\vec{\omega}$$

Por consiguiente, T para un cuerpo rígido tiene la forma

$$\boxed{T=\frac{1}{2}M\vec{v}_P^{\,2}+M\vec{v}_P\cdot\vec{\omega}\times\left(\vec{r}_G-\vec{r}_P\right)+\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\mathrm{II}_\mathrm{P}\cdot\vec{\omega}}$$

En la expresión anterior P es un punto cualquiera y $\vec{v}_P$ es la velocidad del punto del rígido que en el instante considerado coincide con P

Si se elige $P\equiv G$, centro de masas

$$T=\frac{1}{2}M\vec{v}_G^{\,2}+\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\mathrm{II}_\mathrm{G}\cdot\vec{\omega}$$

Si P es un punto fijo del rígido

$$T=\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\mathrm{II}_\mathrm{P}\cdot\vec{\omega}$$

Propiedades del tensor de inercia

Hemos visto que para el cálculo del momentum angular y la energía cinética de un rígido resulta imprescindible conocer el objeto $\mathrm{II}_{P\alpha\beta}$, cuyas componentes respecto a cierto sistema de referencia solidario con el rígido con origen en P hemos dado explícitamente. Dichas componentes forman una matriz simétrica en dimensión tres.

Vamos a probar más adelante que siempre existe un sistema de ejes ortogonales en P tal que la matriz de inercia respecto a dicho sistema es diagonal.

$$\mathrm{II}_{\alpha\beta} = \mathrm{I}_\alpha \delta_{\alpha\beta}$$

o sea

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_3 \end{pmatrix}$$

Los ejes del sistema cartesiano en que la matriz toma esta forma se llaman ejes principales y los correspondientes elementos de la matriz de inercia diagonal, I_1, I_2, I_3, se conocen como los momentos principales de inercia.

Si la velocidad angular del rígido $\vec{\omega}$ está orientada según uno de los ejes principales, entonces $\mathrm{II}\vec{\omega}$ también lo está. Por ejemplo, si

$$\vec{\omega} = \omega .\vec{i}$$

$$\mathrm{II}\vec{\omega} = \mathrm{I}_1 \omega .\vec{i}$$

En este caso $\vec{\omega}$ es un vector propio de II con autovalor I_1. Ello implica que para determinar los momentos principales de inercia y los ejes principales basta resolver el problema de calcular los autovalores y autovectores de una matriz. Los autovalores son los momentos principales y los autovectores apuntan en la dirección de los ejes principales.

La ecuación de autovalores que nos interesa resolver es:

$$\mathrm{II}\,\vec{v} = \mathrm{I}\,\vec{v}$$

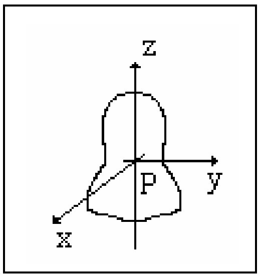
donde II es la matriz de inercia en cierto sistema de referencia e I es uno de sus autovalores. Se trata de un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas correspondientes a las componentes de $\vec{v}$. Este sistema admite soluciones no triviales sólo si el determinante de los coeficientes se anula. Es decir,

$$\begin{vmatrix} \mathrm{I}_{xx} - \mathrm{I} & \mathrm{I}_{xy} & \mathrm{I}_{xz} \\ \mathrm{I}_{xy} & \mathrm{I}_{yy} - \mathrm{I} & \mathrm{I}_{yz} \\ \mathrm{I}_{xz} & \mathrm{I}_{yz} & \mathrm{I}_{zz} - \mathrm{I} \end{vmatrix} = 0$$

donde hemos usado la simetría de la matriz de inercia. Se trata de una ecuación cúbica en I, llamada usualmente ecuación secular. Un teorema bien conocido en álgebra lineal establece que la ecuación secular de una matriz simétrica siempre admite raíces reales y sus correspondientes autovectores son ortogonales.

Para cada una de las raíces de la ecuación secular se resuelve la ecuación de autovectores y se obtiene la dirección correspondiente a uno de los ejes principales.

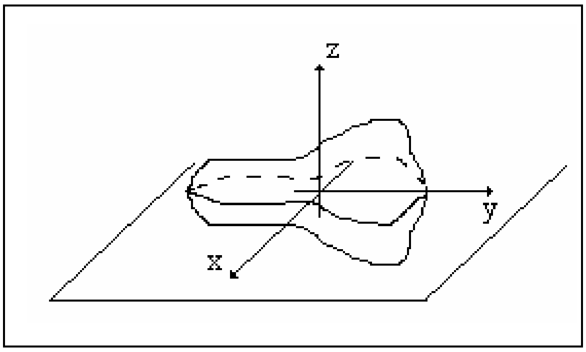
En general en la mayor parte de los problemas prácticos, el rígido tiene ciertas simetrías que permiten determinar los ejes principales por inspección.



Por ejemplo, si el rígido es de revolución alrededor del eje Pz, es fácil ver que los productos de inercia I_{zx} e I_{zy} se anulan por simetría, si uno elige el eje z como el eje de simetría. La matriz de inercia no puede cambiar, debido a la simetría de revolución al rotar alrededor de z los ejes x e y. Ello implica que la matriz de inercia respecto a cualquier sistema de ejes ortogonales que tengan al eje de simetría por eje z toman la forma:

$$\mathrm{II}_P = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

que corresponde al caso en que la ecuación secular tiene una raíz doble.



En el caso de un rígido que tiene un plano de simetría es inmediato comprobar que la matriz de inercia respecto a un punto P perteneciente al plano tiene al eje perpendicular al plano por P como eje principal de inercia. En efecto, es inmediato comprobar que

$$I_{xz} = I_{yz} = 0$$

y la matriz toma la forma

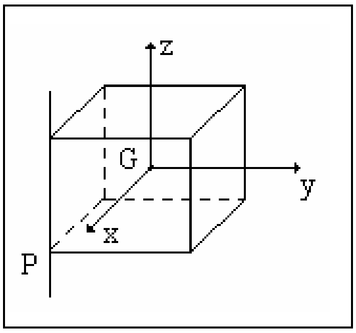
$$\mathrm{II}_P = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Para encontrar los tres ejes principales basta con diagonalizar la matriz restringida al plano Pxy.

Un caso particular con esta simetría es el de los rígidos planos. El eje perpendicular al plano del rígido es eje principal de inercia.

Teorema de Steiner

Las expresiones obtenidas para calcular $\vec{L}$ y T son válidas cualquiera sea el punto que se toma como origen del sistema de coordenadas solidario al rígido. Muchas veces conviene tomar momentos respecto a cierto punto (un punto fijo del cuerpo, por ejemplo) aunque el cálculo del tensor de inercia sea más simple en otro punto. El teorema de Steiner permite relacionar los tensores de inercia respecto a dos puntos.

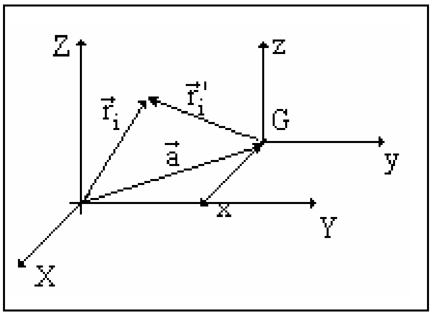


Supongamos por ejemplo que tenemos un cubo con un eje fijo que pasa por una de sus aristas. Es más fácil calcular la matriz de inercia respecto al centro de masa G, ya que los 3 ejes perpendiculares a las caras son obviamente principales, y luego pasar a los ejes paralelos por P.

Para probar el teorema, recordemos que:

$$\mathrm{II}_{P\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} \left\{ m_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_P\right)^2 \delta_{\alpha\beta} - m_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_P\right)_\alpha \left(\vec{r}_i - \vec{r}_P\right)_\beta \right\}$$

y tomamos el origen de coordenadas en P, de modo que $\vec{r}_P = 0$.



$$\vec{r}_i = \vec{a} + \vec{r}_i^{\,'}$$

$$\mathrm{II}_{P\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} \left\{ m_i \left(\vec{a} + \vec{r}_i^{\,'}\right)^2 \delta_{\alpha\beta} - m_i \left(\vec{a} + \vec{r}_i^{\,'}\right)_\alpha \left(\vec{a} + \vec{r}_i^{\,'}\right)_\beta \right\} =$$

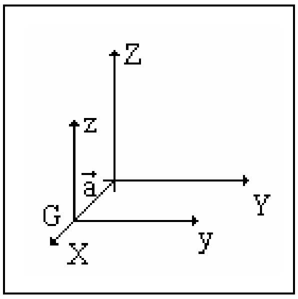
$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ \left(a^2 + 2\vec{a}\vec{r}_i^{\,'} + \vec{r}_i^{\,'2}\right)\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta - a_\alpha \vec{r}_{i\ \beta}^{\,'} - \vec{r}_{i\ \alpha}^{\,'} a_\beta - \vec{r}_{i\ \alpha}^{\,'} \vec{r}_{i\ \beta}^{\,'} \right\}$$

y usando que $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^{\,'} = M\vec{r}_G^{\,'} = 0$

$$\boxed{\mathrm{II}_{P\alpha\beta} = M\left(a^2 \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\right) + \mathrm{II}_{G\alpha\beta}}$$

que es la forma general de la relación de Steiner entre los tensores de inercia respecto a P cualquiera y respecto al centro de masas G. Enfaticemos que esta relación sólo vale si ambos sistemas tienen sus ejes paralelos.

<u>Ejemplo:</u> Se desea trasladar a lo largo del eje Ox



$$\vec{a} = a\vec{\mathrm{I}}$$

$$a_\alpha = a\delta_{\alpha 1}$$

$$\mathrm{II}_{P\alpha\beta} = M\left(a^2\delta_{\alpha\beta} - a^2\delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 1}\right) + \mathrm{II}_{G\alpha\beta}$$

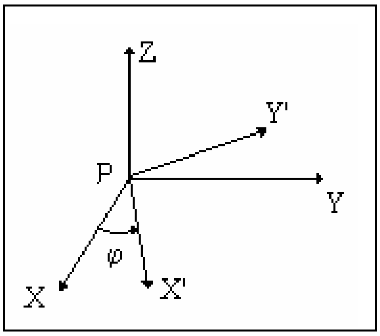
por lo tanto

$\mathrm{I}_{Pxx} = \mathrm{I}_{Gxx}$, $\mathrm{I}_{Pyy} = \mathrm{I}_{Gyy} + Ma^2$ y $\mathrm{I}_{Pzz} = \mathrm{I}_{Gzz} + Ma^2$, y todos los productos de inercia permanecen invariantes.

Rotaciones

Hemos visto cómo relacionar dos tensores de inercia respecto a ejes paralelos trasladados. Supongamos que queremos relacionar el tensor de inercia respecto a dos sistemas rotados uno con relación al otro.

Por ejemplo, en la figura consideramos el caso de una rotación plana.



Llamamos r_α a las coordenadas de Q respecto a Pxyz y $r_\alpha^{'}$ a sus coordenadas respecto a Px'y'z'.

Bajo un cambio de base las coordenadas de Q se transforman linealmente. Es decir,

$$r_\alpha^{'} = \sum_{\beta=1}^{3} \lambda_{\alpha\beta} r_\beta$$

donde λ es la matriz correspondiente a la rotación considerada. Las rotaciones dejan invariantes las distancias de Q al origen.

$$|Q - P|^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} r_\alpha^{'\,2} = \sum_{\alpha=1}^{3} r_\alpha^{'} r_\alpha^{'} = \sum_{\alpha=1}^{3}\left\{\left(\sum_{\beta=1}^{3}\lambda_{\alpha\beta}\vec{r}_\beta\right)\left(\sum_{\gamma=1}^{3}\lambda_{\alpha\gamma}\vec{r}_\gamma\right)\right\} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3}\lambda_{\beta\alpha}^{T}\lambda_{\alpha\gamma} r_\beta r_\gamma =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{3} r_\beta^2 = \sum_{\beta,\gamma=1}^{3} r_\beta \delta_{\beta\gamma} r_\gamma$$

donde $\lambda_{\beta\alpha}^{T} = \lambda_{\alpha\beta}$ es la matriz traspuesta de λ.
Como la relación se cumple para todo punto Q, resulta

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\lambda_{\beta\alpha}^{T}\lambda_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma}$$

relación que escrita en forma matricial toma la forma

$$\lambda^{T}\lambda = \mathrm{I}$$

o sea $\lambda^T = \lambda^{-1}$ y $\lambda^T\lambda = \lambda\lambda^T = \mathrm{I}$

Las matrices que verifican esta relación se llaman ortogonales.

Recordando la forma explícita del tensor de inercia resulta

$$\mathrm{II}'_{P\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ \vec{r}_i^{\,'2}\delta_{\alpha\beta} - \vec{r}_{i\,\alpha}^{\,'}\vec{r}_{i\,\beta}^{\,'} \right\} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ \vec{r}_i^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - \left(\sum_{\gamma=1}^{3}\lambda_{\alpha\gamma} r_{i\gamma}\right)\left(\sum_{\delta=1}^{3}\lambda_{\beta\delta} r_{i\delta}\right)\right\} =$$

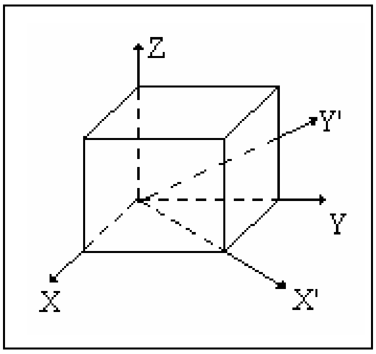
$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ \vec{r}_i^{\,2} \sum_{\gamma=1}^{3}\lambda_{\alpha\gamma}\lambda^T_{\gamma\beta} - \left(\sum_{\gamma,\delta=1}^{3}\lambda_{\alpha\gamma}\lambda^T_{\delta\beta} r_{i\delta} r_{i\gamma}\right)\right\} = \sum_{\gamma,\delta=1}^{3}\lambda_{\alpha\gamma}\mathrm{II}_{P\gamma\delta}\lambda^T_{\delta\beta}$$

Es decir,

$$\mathrm{II}'_{\mathrm{P}} = \lambda\,\mathrm{II}_P\lambda^T$$

Los objetos que transforman de este modo son llamados tensores de rango dos.

<u>Ejemplo:</u> Calcular el tensor de inercia de un cubo respecto a los ejes Ox'y'z' que se muestran en la figura.



Comencemos calculándolo respecto a Oxyz y luego rotaremos un ángulo $\frac{\pi}{4}$ respecto al eje Oz.

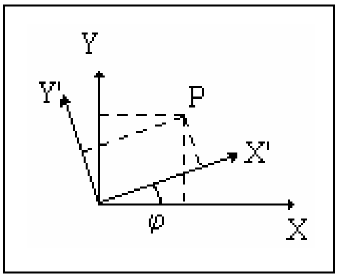
$$\mathrm{I}_{zz} = \int_0^a\int_0^a\int_0^a \rho\left(x^2+y^2\right)dxdydz = a^2\rho\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a + a^2\rho\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^a = 2\rho\frac{a^5}{3} = \frac{2}{3}Ma^2 = \mathrm{I}_{xx} = \mathrm{I}_{yy}$$

$$\mathrm{I}_{xy} = -\int_0^a\int_0^a\int_0^a \rho xydxdydz = -\rho a\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^a = -\frac{Ma^2}{4} = \mathrm{I}_{xz} = \mathrm{I}_{yz}$$

por lo que respecto a Oxyz la matriz de inercia toma la forma

$$\mathrm{II}_O = Ma^2\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora la matriz de rotación alrededor del eje Oz con ángulo φ: $\lambda_{ij}(\varphi)$



$$x' = x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\,\varphi$$
$$y' = -x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\cos\varphi$$
$$z' = z$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \mathrm{sen}\,\varphi & 0 \\ -\mathrm{sen}\,\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es una matriz ortogonal. En

$$\lambda^T = \lambda(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\mathrm{sen}\,\varphi & 0 \\ \mathrm{sen}\,\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda.\lambda^T = \lambda^T.\lambda = I$$

Para $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, $\lambda_{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

y sólo queda por calcular

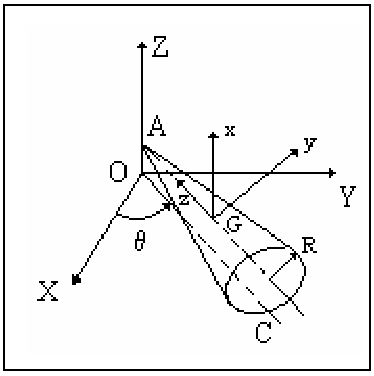
$$\mathrm{II}'_o = \lambda_{\frac{\pi}{4}}\mathrm{II}_o\lambda^T_{\frac{\pi}{4}}$$

Concluyamos es capítulo con una observación importante. Usualmente se calculan las componentes del tensor de inercia respecto a ejes solidarios con el rígido. Si uno desea calcular, por ejemplo, el momento angular respecto al centro de masas G, basta con calcular las componentes de la velocidad angular en el sistema solidario. Luego $\mathrm{II}_G.\vec{w}$ nos dará el vector momento angular expresado en los ejes solidarios.

Si bien siempre es posible trabajar en los ejes solidarios con el rígido, hay casos en que puede convenir usar otros sistemas de referencia, llamados ejes intermedios, donde las componentes del tensor de inercia son también constantes.

Ejemplo:

Un cono rueda sin deslizar sobre un plano horizontal con su vértice A fijo a una altura R, igual al radio de la base, del eje z. El cono tiene altura h, ángulo al vértice α, y masa M. Se desea calcular la energía cinética T del cono en función de $\dot{\theta}$.



Es fácil ver que la distancia de G al vértice A es $\frac{3h}{4}$.

Elegimos ahora un sistema de ejes principales por G. El eje de simetría AG del cono es obviamente un eje principal, por lo que elegimos el eje z según AG. Como el cono es de revolución alrededor del eje AG, cualquier par de ejes perpendiculares a AG son principales. Elegimos y según la horizontal y x según la vertical.
Respecto a estos ejes el tensor de inercia tiene la forma

$$\mathrm{II}_G = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_3 \end{pmatrix}$$

Para determinar la velocidad angular del cono comencemos observando que

$v_A = 0$, ya que A es fijo.

$v_C = 0$, ya que el cono rueda sin deslizar.

Por lo tanto

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \vec{\omega} \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A) = 0$$

$\therefore \vec{\omega}$ es colineal con $\vec{r}_C - \vec{r}_A$

$$\vec{\omega} = \omega \cos\alpha . \vec{k} + \omega sen\alpha . \vec{i}$$

La velocidad del centro de masas es

$$\vec{v}_G = \underbrace{\vec{v}_A}_{=0} + \vec{\omega} \times \left(-\frac{3}{4} h . \vec{k} \right) = \frac{3}{4} h \dot{\theta}\, \vec{j} \quad \therefore \quad \dot{\theta} = +\omega sen\alpha$$

o sea

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\theta}\, ctg\alpha . \vec{k} + \dot{\theta} . \vec{i}}$$

Para calcular T basta recordar que:

$$T = \frac{1}{2} M v_A^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathrm{II}_A \cdot \vec{\omega}$$

$$\frac{1}{2} M \vec{v}_A^{\,2} = 0$$

$$\frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathrm{II}_A \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} (\omega_x, 0, \omega_z) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \mathrm{I} \omega_x^{\ 2} + \frac{1}{2} \mathrm{I}_3 \omega_z^{\ 2} =$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{I} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \mathrm{I}_3 ctg^2 \alpha \dot{\theta}^2$$

Los momentos de inercia al punto A del cono son

$$\mathrm{I}_3 = \frac{3}{10} M h^2 tg^2 \alpha$$

$$\mathrm{I} = \frac{3}{20} M h^2 \left(4 + tg^2 \alpha\right)$$

y sustituyendo se obtiene

$$\boxed{T = \frac{3}{40} M h^2 \left(6 + tg^2 \alpha\right) \dot{\theta}^2}$$