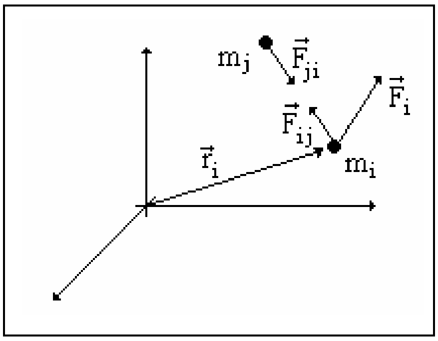
CAPÍTULO V

SISTEMAS DE PARTÍCULAS

SISTEMAS DE PARTÍCULAS

La mayor parte de los objetos físicos no pueden por lo general tratarse como partículas. En mecánica clásica, un objeto extendido se considera como un sistema compuesto por un gran numero de partículas puntuales. El estudio que sigue sirve tanto para un agregado de partículas libres como pueden ser los fragmentos de una granada, como para un sólido rígido en cuyo caso las partículas se mueven manteniendo distancias fijas entre si.



Sea un sistema de partículas de masa m_i. Sobre cada partícula actúan dos tipos de fuerzas. Las fuerzas llamadas internas provienen de las otras partículas del sistema. $\vec{F}_{ij}$ representa la fuerza que actúa sobre la partícula i debida a la presencia de la partícula j. De acuerdo a la tercera ley.

1) $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

Para este estudio nos limitaremos al caso de fuerzas centrales; $\vec{F}_{ij}$ esta dirigida a lo largo de la línea que une la partícula i con la j. Ello implica descartar el caso particular de fuerzas internas que dependen de la velocidad relativa de las partículas.

El segundo tipo de fuerzas provienen del exterior del sistema. Llamaremos $\vec{F}_i$ a la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre la partícula i.

Las ecuaciones ce Newton para la partícula i establecen que

2) $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i}^{N} \vec{F}_{ij}$

Sumando para toda i

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i}^{N} \vec{F}_{ij}$$

y observando que $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i}^{N} \vec{F}_{ij} = 0$, ya que las fuerzas internas se cancelan de a pares, resulta que

3) $\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{R}_{ext}$

donde $\vec{R}_{ext}$ es la resultante de las fuerzas externas.

Recordando que la masa total es $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ y definiendo el vector posición del centro de masas o baricentro

4) $\vec{r}_G = \dfrac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$

resulta

5) $M\ddot{\vec{r}}_G = \vec{R}_{ext}$

El centro de masas se mueve como lo hace una partícula con la masa del sistema completo sobre la cual actúa una fuerza igual a la resultante de las fuerzas externas.

Conocida la posición y velocidad iniciales de las partículas del sistema, la ecuación 4) y su derivada permiten calcular la posición y velocidad del centro de masas en el instante inicial. La ecuación 5) determina su evolución en el tiempo, un vez conocida $\vec{R}_{ext}$. Por ejemplo, si la única fuerza externa es el peso $\vec{R}_{ext} = -Mg\vec{k}$, el centro de masas seguirá una trayectoria parabólica, no importa cuan complicada sea la distribución de partículas.

El sistema de ecuaciones 2) contiene mucha más información que la ecuación 5). Si las fuerzas externas dependen de la posición y/o velocidad de las partículas del sistema $\vec{F}_i(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)$, no se puede determinar el movimiento del centro de masa sin analizar el movimiento de cada partícula del sistema.

La ecuación 5) es la primera ecuación fundamental de un sistema de partículas. Relaciona la derivada del momentum lineal total $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = M.\vec{v}_G$ con la resultante de las fuerzas externas.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}_{ext}$$

La segunda ecuación fundamental relaciona la derivada del momentum angular total con el momento total o torque total del sistema de fuerzas.

Sea Q un punto arbitrario, entonces el momentum angular total es

$$\vec{L}_Q = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times m_i \vec{v}_i$$

Su derivada respecto al tiempo

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{v}_i - \vec{v}_Q) \times m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times m_i \vec{a}_i =$$

$$= -\vec{v}_Q \times M\vec{v}_G + \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \left(\vec{F}_i + \sum_{i \neq j}^{N} \vec{F}_{ij} \right)$$

donde hemos usado la ecuación 2), la definición del centro de masas y el hecho de que $\vec{v}_i \times \vec{v}_i = 0$.

Las fuerzas internas una vez más no contribuyen ya que

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{ij} + (\vec{r}_j - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

ya que por hipótesis las fuerzas internas son centrales.

Por consiguiente

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = -\vec{v}_Q \times M\vec{v}_G + \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_i$$

El último sumando es el momento total respecto de Q de las fuerzas externas.

$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_i$$

o sea

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = -\vec{v}_Q \times M\vec{v}_G + \vec{M}_Q^{ext}$$

que es la segunda ecuación fundamental de un sistema de partículas.

La ecuación se simplifica en tres casos particulares.

a) $\vec{v}_Q = 0$. Se toman momentos respecto a un punto fijo.
b) $\vec{v}_Q$ es colineal con $\vec{v}_G$.

c) $Q \equiv G$. Se toman momentos respecto del centro de masas.

En los tres casos

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{M}_Q^{ext}$$

en particular $\dfrac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{ext}$

Para un sistema de partículas cualquiera las dos ecuaciones fundamentales no bastan para determinar la evolución del sistema. Son solo seis ecuaciones y el sistema tiene 3N coordenadas independientes. Sin embargo veremos que en un sólido rígido solamente seis coordenadas bastan para determinar su posición y en este caso las dos ecuaciones fundamentales son suficientes.

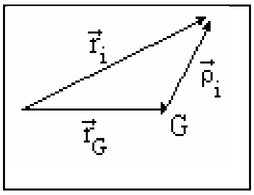
La simplificación fundamental que proporcionan estas ecuaciones se debe a la posibilidad de eliminar las fuerzas internas. Para que ello sea posible se debe cumplir que: “Si dos partículas ejercen fuerzas mutuas, estas son iguales en intensidad, su línea de acción es la línea que une dichas partículas y sus sentidos son opuestos”. Este enunciado se toma muchas veces como la tercera ley de Newton. (Véase por ej. Synge y Griffith. La misma vale esencialmente cuando el sistema no involucra partículas cargadas en movimiento).

Cuando se anulan $\vec{R}_{ext}$ y $\vec{M}_Q$ se conserva el momentum lineal total $\vec{P}$ y el momentum angular total $\vec{L}_Q$. En particular ambas cantidades se conservan para un sistema libre de fuerzas externas.

Concluiremos este estudio haciendo algunas consideraciones sobre la energía de un sistema de partículas.

La energía cinética de un sistema de partículas puede expresarse como la suma de la energía cinética del baricentro más la energía cinética respecto de él.

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$



definimos $\vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_G$ entonces

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\dot{\vec{r}}_G^{\,2} + 2\dot{\vec{r}}_G \dot{\vec{\rho}}_i + \dot{\vec{\rho}}_i^{\,2} \right)$$

observando que $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_G \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\rho}_i = 0$ y por lo tanto $\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{\rho}}_i = 0$

resulta

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_G^{\,2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{\rho}}_i^{\,2}$$

Si las fuerzas externas derivan de un potencial

$$\vec{F}_i = -\nabla_i U_i(\vec{r}_i)$$

se puede introducir $U(\vec{r}_1 ... \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^{N} U_i(\vec{r}_i)$ y $\vec{F}_i = -\nabla_i U$. U es la energía potencial total del sistema.

Independientemente del tipo de fuerzas en juego se puede relacionar la potencia de las fuerzas con la variación de la energía cinética.

$$P_T = \sum_{i=i}^{N} \vec{F}_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right] = \frac{dT}{dt}$$

Veremos más adelante que en el caso particular de un cuerpo rígido es posible una vez más eliminar las fuerzas internas que tienen potencia nula. De modo que par un cuerpo rígido se cumple que

$$P_T^{ext} = \frac{dT}{dt}$$

la potencia total de las fuerzas externas es igual al ritmo de variación de la energía cinética.

Ejercicio: Probar que si se cumple la primera ecuación fundamental de un sistema de partículas y la segunda respecto a un punto Q, se cumple la segunda respecto a un punto cualquiera L.