CAPÍTULO III

TRABAJO Y ENERGÍA

"De todos los conceptos físicos, el de energía es probablemente el de más vasto alcance. Todos, con formación técnica o no, tienen una percepción de la energía y lo que esta palabra significa. Energía es lo que debemos pagar para que las cosas se hagan.... La energía es la moneda universal que existe en incontables variedades; cada proceso físico representa una conversión de esta moneda de una variedad a otra. "

A.P French
Newtonian mechanics(1971)

TRABAJO Y ENERGÍA

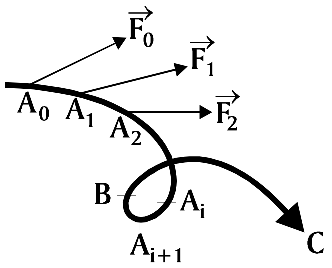
III-1. Introducción

Cuando las fuerzas que actúan sobre una partícula se pueden expresar como función de la posición, es decir $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$, los métodos de integración de las ecuaciones de Newton descritas en el capítulo anterior no son en general suficientes. En efecto, sólo podemos resolver el caso de fuerzas unidimensionales $\vec{F} = F(x)\vec{i}$.

Veremos en este capítulo que los conceptos de trabajo y energía nos resultarán útiles para la descripción de movimientos sometidos a este tipo de fuerzas.

En este capítulo hace su primera aparición un concepto que tiene fundamental importancia en todas las ramas de la física: el concepto de energía. La clave del inmenso valor del concepto de energía radica en su conservación. En este capítulo veremos algunos ejemplos en que la energía mecánica se conserva y que, en los casos en que hay perdida de energía mecánica, siempre es posible reconocer otras formas de energía que aseguran su conservación.

III-2 Trabajo.



Consideramos una partícula A que se mueve a lo largo de la curva C bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$ que puede variar a lo largo de C. Si se consideran desplazamientos suficientemente pequeños $\Delta_1\vec{r} = \overrightarrow{A_0A_1}$ la fuerza $\vec{F}$ se podrá considerar aproximadamente constante en este intervalo e igual a $\vec{F}_0$. El trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$ en dicho desplazamiento se define por el producto escalar

$$\Delta_1 W = \vec{F}_0 \cdot \Delta_1\vec{r}$$

El trabajo total ejercido sobre la partícula cuando ésta se mueve de A a B a lo largo de la curva C es la suma de los trabajos efectuados producidos en los sucesivos desplazamientos infinitesimales

$$W_{AB} = \lim_{\Delta_i \vec{r} \to 0} \sum_{i=0}^{N} \vec{F}_i \cdot \Delta_i \vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Dicho límite es conocido como la integral a lo largo de la curva C entre los puntos A y B. A pesar de que el concepto de integral sobre una curva es nuevo, en muchos casos es posible evaluar directamente la sumatoria. Para poder calcular el trabajo debemos conocer $\vec{F}$ en función de x, y, z y la ecuación de la trayectoria seguida por la partícula.

Si la curva C está dada en forma paramétrica

$$\vec{r} = \vec{r}(\lambda)$$

tal que $\vec{r}(\lambda_A) = \vec{r}_A$ y $\vec{r}(\lambda_B) = \vec{r}_B$

entonces consideramos una partición de la curva en pequeños intervalos es la misma que divide el intervalo AB

$$\Delta_i \vec{r} = \vec{r}(\lambda_{i+1}) - \vec{r}(\lambda_i)$$

y se puede calcular el trabajo mediante una integral ordinaria , en efecto

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \lim_{\Delta_i \lambda \to 0} \sum_{i=0}^{N} \vec{F}(\vec{r}(\lambda_i)) \cdot (\vec{r}(\lambda_{i+1}) - r(\lambda_i)) \\ &= \lim_{\Delta \lambda \to 0} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}(r(\lambda_i)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \Delta_i \lambda \\ &= \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \vec{F}(r(\lambda)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

$$\int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \left[F_x(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)) x'(\lambda) + F_y(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)) y'(\lambda) + F_z(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)) z'(\lambda) \right] dz$$

Calculemos ahora el trabajo en algunos casos simples.

Ejemplo 1

Trabajo ejercido por una fuerza constante $\vec{F} = \vec{F}_0$ para desplazar una partícula de A a B a lo largo de la curva C

$$W_{AB} = \lim_{\Delta_i r \to 0} \sum_{i=0}^{N} \vec{F}_0 \cdot \Delta_i \vec{r}$$

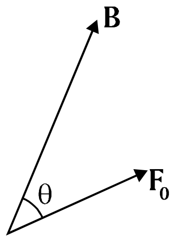
como $\vec{F}_0$ es constante podemos usar la distributiva del producto escalar y escribir:

$$W_{AB} = \vec{F}_0 \cdot \lim_{\Delta_i r \to 0} \sum_{i=0}^{N} \Delta_i \vec{r}$$

$$= \vec{F}_0 \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

ya que la suma de los desplazamientos $\Delta_i \vec{r}$ es el desplazamiento total de A hasta B.

Vemos que en este caso el trabajo realizado por la fuerza constante no depende de la curva C elegida para ir de A hasta B. Mas adelante veremos que las fuerzas que realizan un trabajo independiente del recorrido se llaman conservativas. Las fuerzas constantes son por lo tanto un ejemplo de fuerzas conservativas.

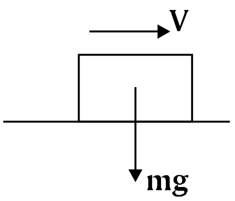


El trabajo de una fuerza constante para llevar una partícula de A a B es como hemos visto

$$W_{AB} = \vec{F}_0 \cdot \vec{r}_{AB} = |F_0| d_{AB} \cos\theta$$

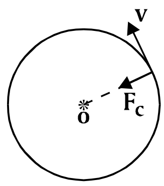
Por lo tanto, una fuerza constante que es perpendicular al vector desplazamiento realiza un trabajo nulo.

Por ejemplo, el trabajo ejercido por la fuerza de gravedad sobre un cuerpo que se mueve sobre un plano horizontal es nulo.



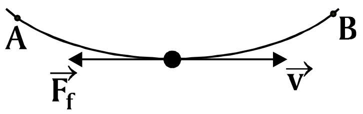
Otro ejemplo de fuerza que ejerce un trabajo nulo es la fuerza centrípeta $\vec{F}_c$ en un movimiento circular. En efecto

$$W = \lim_{\Delta_i r \to 0} \sum_i \vec{F}_c^{\,i} \cdot \Delta_i \vec{r} = 0$$



ya que cada sumando es nulo por ser F_c^i perpendicular al desplazamiento $\Delta_i r$ dirigido según la tangente.

Ejemplo 2 Trabajo ejercido por la fuerza de fricción sobre un cuerpo apoyado sobre un plano horizontal. Deseamos calcular el trabajo ejercido por la fuerza



$$F_{\mathrm{f}} = -\mu_c mg\vec{u}_v$$

sobre un cuerpo que se desplaza de A a B a lo largo de la curva C

$$W_{AB} = \lim_{\Delta_i r \to 0} \sum_i F_{\mathrm{f}}^{\,i} \cdot \Delta_i \vec{r}$$

En el límite cuando los desplazamientos tienden a cero, su dirección coincide con la de la tangente, de modo que

$$\Delta_i \vec{r} = \left|\Delta_i \vec{r}\right| \vec{u}_v^{\,i} = \Delta_i l \vec{u}_v^{\,i}$$

donde $\Delta_i l$ es la longitud del arco recorrido para ir de r_i a $r_i + \Delta_i r$

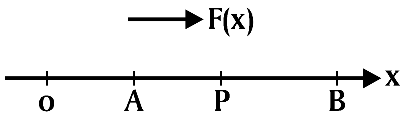
Por lo tanto

$$W_{AB} = \lim_{\Delta_i l \to 0} \sum_i - \mu_c mg \Delta_i l = -\mu_c mg l_{AB}^c$$

donde l_{AB}^c es la longitud de la curva C entre A y B.

El trabajo es siempre negativo y proporcional a la longitud de la curva recorrida para ir de A a B. En este ejemplo, el trabajo depende de la trayectoria elegida para ir de A a B a través de su longitud y por lo tanto las fuerzas de fricción son un ejemplo de fuerzas no conservativas.

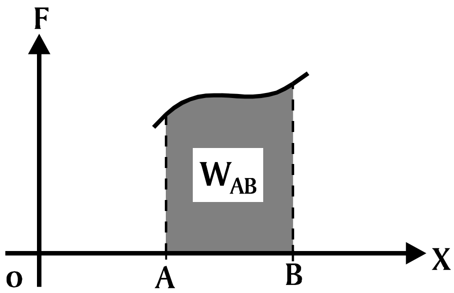
Ejemplo 3 Caso general unidimensional



Consideremos en este ejemplo el caso de una partícula que se mueve a lo largo del eje OX sometido a una fuerza general que depende de la posición $F(x)\vec{i}$.

El trabajo realizado por $F(x)$ en el desplazamiento de A a B estará dado por

$$W_{AB} = \lim_{\Delta_i x \to 0} \sum_i F(x_i)\,\Delta_i x = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx$$



Si $\mathsf{F}(x)$ es una primitiva de $F(x)$:

$$W_{AB} = \mathsf{F}(x_B) - \mathsf{F}(x_A)$$

y por lo tanto en este caso el trabajo se puede expresar en términos de la posición inicial y final, por lo que las fuerzas <u>unidimensionales</u> que no dependen <u>únicamente de la posición</u> siempre son conservativas.

Si $F(x)$ es la fuerza producida por un resorte

$$F(x) = -kx$$

$$W_{AB} = -\int_{x_A}^{x_B} kx\,dx = \frac{-k\,x_B^2}{2} + \frac{k\,x_A^2}{2} = \frac{-k}{2}(x_B^2 - x_A^2)$$

En el caso en que actúan varias fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots$ sobre una partícula, los trabajos realizados por cada una de ellas en un pequeño desplazamiento $\Delta\vec{r}$ serán:

$$\Delta W_1 = \vec{F}_1.\Delta\vec{r}\ ,\ \Delta W_2 = \vec{F}_2.\Delta\vec{r}\ ,\ \Delta W_3 = \vec{F}_3.\Delta\vec{r}$$

El trabajo total se define como la suma

$$\Delta W = \vec{F}_1.\Delta\vec{r} + \vec{F}_2.\Delta\vec{r} + \vec{F}_3.\Delta\vec{r}$$

$$= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)\Delta\vec{r}$$

$$= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

que es el trabajo realizado por la resultante de las fuerzas aplicadas.

En el sistema MKS, cuyas unidades básicas son el metro, el kilogramo y el segundo, las fuerzas se miden en Newtons y por lo tanto el trabajo que se expresa en términos de productos de fuerzas por distancias se expresa en Newton metro, llamado Joule, y que se abrevia J.

$$1J = 1\,N\,m = 1kg\,m/s^2\,m = 1kg\,m^2/s^2$$

En el sistema CGS de unidades, las unidades básicas son el centímetro, el gramo y el segundo, y las fuerzas se miden en dinas.

$$1 \text{ dina } = 1\,gr\,cm/s^2$$

y el trabajo se expresa en ergios

$$\begin{aligned} 1\ erg &= 1 \text{ dina } \times cm = 1g\,cm^2/s^2 \\ &= 10^{-7}\,J \end{aligned}$$

III-3 Potencia.

Consideremos una partícula con velocidad instantánea $\vec{v}$. En un pequeño intervalo de tiempo la partícula sufre un desplazamiento

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}\,\Delta\vec{t}$$

El trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre la partícula en dicho intervalo es

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \vec{r} = \vec{F}.\vec{v}\Delta t$$

Se define la potencia instantánea por

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

y la potencia resulta ser el producto de la fuerza por la velocidad. El trabajo total realizado por $\vec{F}$ para ir de A a B a lo largo de la curva C seguida por la partícula se puede expresar en función de la potencia por

$$W_{AB} = \lim_{\Delta_i \vec{r} \to 0} \sum_i \vec{F}_i \Delta_i \vec{r} = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i \vec{F}_i \vec{v}_i \Delta t = \int_{t_A}^{t_B} P(t) dt$$

expresión que coincide con la obtenida en términos de una curva dada en forma paramétrica. Aquí el parámetro es el tiempo y la curva C la trayectoria real seguida por la partícula.

La potencia es un concepto de gran importancia práctica en ingeniería, ya que el tiempo requerido para realizar un trabajo es por lo general de gran interés.

En el sistema de unidades MKS la unidad de potencia es el Watt (vatio).

Una unidad de uso frecuente es el caballo de vapor HP, definido como la potencia necesaria para elevar 75 kg a una altura de 1 metro en un segundo

$$1HP = 75 \times 9{,}8 \frac{Nm}{s} = 735 J/s = 735 W$$

III-4. El Teorema de la Energía.

Existe una importante relación entre el trabajo realizado por la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula y la variación de velocidad de la misma. Esta ley se obtiene de la segunda ley de Newton que relaciona la fuerza resultante $\vec{F}$ con la aceleración

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

La relación antes mencionada puede deducirse de la siguiente propiedad de la derivada de un producto escalar

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{2d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$$

Entonces, multiplicando la ecuación de Newton escalarmente por $\vec{v}$ resulta

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}m\frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv^2\right]$$

La magnitud $\frac{1}{2}mv^2$ recibe el nombre de energía cinética de la partícula. Se trata de un escalar que depende de la masa y velocidad de la partícula:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

La relación que acabamos de establecer entre la potencia y la energía cinética puede escribirse

$$P = \frac{dT}{dt}$$

Si integramos dicha ecuación en el tiempo resulta

$$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} P\,dt = \int_{t_A}^{t_B} dt\,\frac{dT}{dt} = T_b - T_a$$

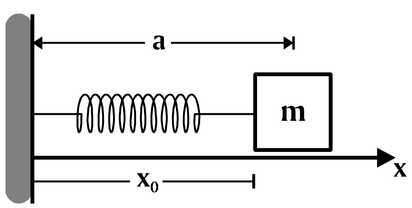
o sea

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

donde la integral debe tomarse a lo largo del camino seguido por la partícula. El trabajo total realizado por la fuerza resultante es igual a la variación de la energía cinética de la partícula.

Ejemplo 1.

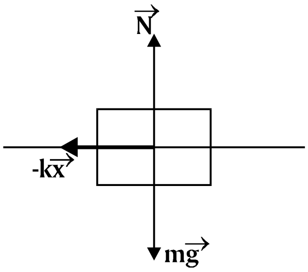
Un resorte de constante k actúa sobre una masa m apoyada sobre un plano horizontal sin fricción.



Inicialmente, el resorte se estira una distancia a y se suelta.

Calcular la velocidad cuando ésta pasa por un punto situado a una distancia b de la posición de equilibrio.

Sobre la masa m actúan el peso, la reacción normal y la fuerza del resorte. El trabajo realizado por el peso y la normal es nulo.



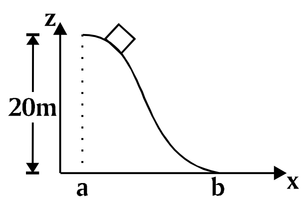
La única fuerza que realiza trabajo es la del resorte.

$$W_{AB} = \int_a^b -k\,x\,dx = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

pero v_a=0 , es decir

$$-\frac{1}{2}k\,x_b^2 + \frac{1}{2}k\,x_a^2 = \frac{1}{2}mv_b^2$$

$$v_b = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)\left(x_a^2 - x_b^2\right)}$$



Ejemplo 2.

Un cuerpo de masa m desliza sin fricción sobre una superficie lisa como se indica en la fig.11 Si parte del reposo cuando se encuentra a una altura h, determinar la velocidad cuando llega al punto b.

Sobre el cuerpo actúan el peso y la reacción normal de la superficie. La reacción normal no realiza trabajo ya que en todo momento el desplazamiento es perpendicular a la fuerza.

El peso es una fuerza constante

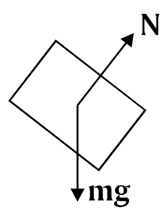
$$F_0 = -mg\vec{k}$$

Por consiguiente, hemos visto que

$$W_{ab} = \vec{F}_0 \cdot \left(\vec{r}_b - \vec{r}_a\right) = -mg\vec{k} \cdot \left(\vec{r}_b - \vec{r}_a\right)$$
$$= -mg\left(z_b - z_a\right) = mg\,z_a$$

ya que z_b=0 y, por lo tanto,

$$W_{ab} = mg\,z_a = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}mv_b^2$$



o sea

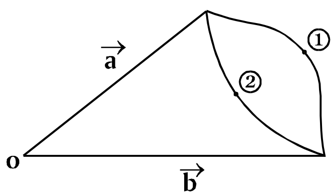
$$v_b = \sqrt{2\,g\,z_a}$$

III-5. Energía potencial

En muchos de los ejemplos que hemos considerado, el trabajo realizado por las fuerzas no dependía del camino seguido para ir del punto inicial y final. Tal era por ejemplo el caso del trabajo realizado por las fuerzas constantes.

Llamaremos conservativas a las fuerzas cuyo trabajo no depende del camino recorrido. Más precisamente, una fuerza es conservativa si es función de la posición $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ y si <u>además</u> el trabajo realizado por $\vec{F}$ para llevar la partícula de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ es independiente del camino recorrido, o sea

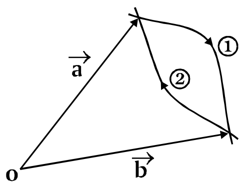
$$W_{ab,1} = W_{ab,2}$$



Como el trabajo por una fuerza para ir de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ a lo largo de la curva (1) puede expresarse

$$W_{ab,1} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_b^a \vec{F}\cdot d\vec{r} = -W_{ba,1}$$

resulta que el trabajo necesario par llevar la partícula de $\vec{b}$ a $\vec{a}$ a lo largo de la misma curva es el opuesto.



Por lo tanto, podemos escribir en el caso de que $\vec{F}$ sea conservativa

$$W_{ab,1} = W_{ab,2} = -W_{ba,2}$$

o sea,

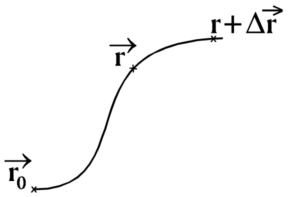
$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0$$

En otras palabras, si la fuerza es conservativa el trabajo hecho por la fuerza sobre la partícula en un circuito cerrado es nulo. Este resultado no puede sorprendernos, ya que si la fuerza es conservativa el trabajo realizado para ir de $\vec{a}$ al mismo punto $\vec{a}$ no depende del camino recorrido y por lo tanto debe ser igual al trabajo realizado según el camino nulo, que obviamente es cero.

Llamaremos no conservativas a aquellas fuerzas cuyo trabajo sobre una partícula depende de la trayectoria seguida para unir el punto inicial y final. Un ejemplo de este tipo de fuerzas es la fricción. En efecto, vimos que el trabajo realizado por las fuerzas de fricción era proporcional a la longitud de la curva recorrida y por lo tanto dependía de la trayectoria.

Estamos ahora en condiciones de definir la energía potencial asociada a una fuerza conservativa. Sea $\vec{r}_0$ un punto fijo que se elige como referencia. Entonces, podemos definir

$$U(\vec{r}) = -W_{\vec{r}_0\vec{r}} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(r)\cdot d\vec{r}$$



ya que dicho trabajo será únicamente una función de $\vec{r}$ por ser la fuerza $\vec{F}$ conservativa. Obsérvese que la definición de $U(r)$ depende de la elección del punto de referencia $\vec{r}_0$, un cambio de puntos de referencia cambia el valor de $U(\vec{r})$ por una constante.

Calculemos ahora el cambio de U cuando la partícula sobre un pequeño desplazamiento de $\vec{r}$ a $\vec{r}+\Delta\vec{r}$:

$$U(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - U(\vec{r}) = -W_{\vec{r}_0,\vec{r}+\Delta\vec{r}} + W_{\vec{r}_0,\vec{r}} = -\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$U(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z =$$
$$= -Fx\Delta x - Fy\Delta y - Fz\Delta z$$

Como la relación vale para todo desplazamiento infinitesimal $\Delta\vec{r}$, debe cumplirse:

$$Fx = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad Fy = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad Fz = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

En forma vectorial estas ecuaciones se pueden escribir en términos del gradiente de U, definido por:

$$\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{\mathrm{i}} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\mathrm{j}} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{\mathrm{k}}$$

y por lo tanto

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$$

En conclusión, hemos probado que si una fuerza es conservativa ella puede expresarse como el opuesto del gradiente de la energía potencial.

Es posible probar el recíproco, es decir que si una fuerza se puede expresar como el gradiente de una función $U(\vec{r})$ entonces $\vec{F}$ es conservativa y $U(\vec{r})$ es la energía potencial.

Nuevamente, el valor de $U(\vec{r})$ resulta determinado a menos de una constante. En efecto, si

$$U'(\vec{r}) = U(\vec{r}) + C$$

entonces

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U'(\vec{r})$$

Por otra parte, si la fuerza $\vec{F}$ se puede expresar como un gradiente, sus componentes debe satisfacer ciertas condiciones.

En efecto

$$\frac{\partial Fx}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Fy}{\partial x}$$
$$\frac{\partial Fy}{\partial z} = -\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial Fz}{\partial y}$$
$$\frac{\partial Fz}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial Fx}{\partial z}$$

Por consiguiente, si una fuerza es conservativa sus componentes deben satisfacer

$$\frac{\partial Fx}{\partial y} - \frac{\partial Fy}{\partial x} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial Fy}{\partial z} - \frac{\partial Fz}{\partial y} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial Fz}{\partial x} - \frac{\partial Fx}{\partial z} = 0$$

También es posible probar el recíproco, de modo que cumple que las relaciones que acabamos de establecer son condición necesaria y suficiente para que una fuerza sea conservativa.

Ejemplo Se consideran las siguientes fuerzas

$$\vec{F}_1 = axy\,\vec{\mathrm{i}}\text{ -}az\,\vec{\mathrm{j}} - ax\vec{\mathrm{k}}$$

$$\vec{F}_2 = 2ax\,\vec{\mathrm{i}} - bz\,\vec{\mathrm{j}} - by\,\vec{\mathrm{k}}$$

a) Determinar si son conservativas.

b) En el caso de que lo sean, determinar la energía potencial asociada.

a) Si F_1 es conservativa debe cumplir para todo valor de x, y, z:

$$0 = \frac{\partial F_1 x}{\partial y} - \frac{\partial F_1 y}{\partial x} = a\,x$$

$$0 = \frac{\partial F_1 y}{\partial z} - \frac{\partial F_1 z}{\partial y} = -a$$

$$0 = \frac{\partial F_1 z}{\partial x} - \frac{\partial F_1 x}{\partial z} = -a$$

y por consiguiente F_1 no es conservativa. Análogamente veamos qué ocurre para F_2

$$0 = \frac{\partial F_2 x}{\partial y} - \frac{\partial F_2 y}{\partial x} = 0$$

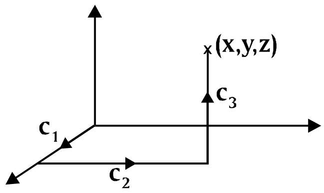
$$0 = \frac{\partial F_2 y}{\partial z} - \frac{\partial F_2 z}{\partial y} = b - b$$

$$0 = \frac{\partial F_2 z}{\partial x} - \frac{\partial F_2 x}{\partial z} = 0$$

y por lo tanto F_2 es conservativa.

b) Calculemos ahora la energía potencial U_2 asociada a $\vec{F}_2$.

Tomemos como punto de referencia para definir U_2 el origen de coordenadas. Como $\vec{F}_2$ es conservativa podemos elegir el camino como mejor nos convenga para ir de $\vec{r}_0$ a $\vec{r}_1$. Lo más simple es seguir rectas paralelas a los ejes coordenados.



$$U_2(x_1,y_1,z_1) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}$$

$$= -\int_{c_1} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} - \int_{c_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} - \int_{c_3} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}$$

A lo largo de C_1: $y = z = 0$, $d\vec{r} = dx\,\vec{\mathrm{i}}$

$$\int_{c_1} \vec{F}_2 \cdot dr = \int_0^{x_1} \vec{F}_{2x}\, dx = \int_0^{x_1} 2ax \cdot dx = ax_1^2$$

A lo largo de $C_2: x = x_1,\ z = 0$, $d\vec{r} = dy\,\vec{\mathrm{j}}$

$$\int_{c_2} \vec{F}_2 \cdot dr = \int_0^{y_1} \vec{F}_{2y}\, dy = 0$$

Finalmente a lo largo de $C_3: x = x_1,\ y = y_1$, $d\vec{r} = dz\,\vec{\mathrm{k}}$

$$\int_{c_3} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \int_0^{z_1} \vec{F}_{2z}\, dz = \int_0^{z_1} by_1\, dz = by_1 z_1$$

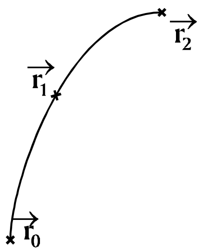
Por lo tanto,

$$U_2(x_1,y_1,z_1) = -a\,x_1^2 - b\,y_1\,z_1$$

y se puede verificar fácilmente que $\vec{F}_2$ es el opuesto del gradiente de U_2.

III-6. Conservación de la Energía.

Cuando una fuerza es conservativa, el trabajo hecho por una fuerza cuando la partícula va de $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ se puede expresar en términos de la diferencia de energía potencial en dichos puntos.



En efecto

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$$

y por lo tanto cuando la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es conservativa resulta del Teorema de la Energía

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(r_A) - U(r_B) = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

es decir,

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + U(\vec{r}_A) = \frac{1}{2} m v_B^2 + U(\vec{r}_B)$$

A la suma de la energía cinética más potencial en un instante dado se le llama energía mecánica total de la partícula y se le designa por E. Hemos establecido por consiguiente que cuando las fuerzas que actúan sobre una partícula son conservativas la energía mecánica total E de la partícula permanece constante y se cumple

$$\frac{1}{2} m v^2 + U(\vec{r}) = E = \text{constante}$$

III-6a. Caso unidimensional

En el caso de movimiento a lo largo de un recta, la fuerza tiene la forma $F(x)$ y el trabajo

$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} F(x) dx = \mathsf{F}(x_B) - \mathsf{F}(x_A)$$

y la energía potencial

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x) dx = -\mathsf{F}(x) + \mathsf{F}(x_0)$$

Como $\mathsf{F}(x)$ es una primitiva de $F(x)$ se cumple que

$$F(x) = -\frac{d\,U(x)}{dx}$$

y la ecuación de conservación de la energía establece que

$$E = \frac{1}{2} m x^2 + U(x)$$

Obsérvese que si se cambia el punto de referencia $\vec{r}_0$ la energía potencial cambia por una constante y por consiguiente la energía mecánica también lo hace. Sin embargo, la información contenida en la ecuación no cambia; ella sigue estableciendo que la suma de la energía cinética y potencial se conserva.

La ecuación de conservación se puede escribir

$$E = \frac{1}{2}mx^2 + U(x)$$

Esta ecuación se obtuvo del Teorema de la Energía, que se demostró haciendo uso de la ley de Newton. Sólo contiene derivadas primeras de la posición, al contrario de lo que ocurre con la ecuación de Newton, que contiene derivadas segundas. Por esa razón, de la ecuación de conservación se dice que es una integral primera de la energía. Ella permite calcular $x(t)$. En efecto,

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\tfrac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}$$

o sea,

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x dt}{\sqrt{\tfrac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}} = \int_{t_0}^{t} dt$$

y haciendo el cambio de variable $x = x(t), dx = \dot{x}dt$

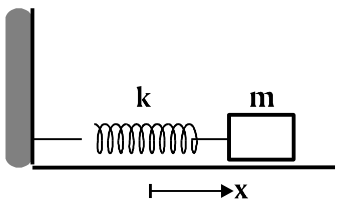
$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\tfrac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

ecuación que permite obtener una relación entre x y t y resuelve el problema del movimiento rectilíneo de la partícula.

Ejemplo Se desea determinar la velocidad de una masa m ligada a un resorte de constante k cuando ésta se encuentra a una distancia x_1 del punto de equilibrio. Se sabe que su velocidad cuando pasa por dicho punto es v_0.

$$F(x) = -k\,x$$

$$U(x) = +\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$



Si se toma la posición de equilibrio $x_0 = 0$ como punto de referencia

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

y la ecuación de conservación de la energía establece que

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

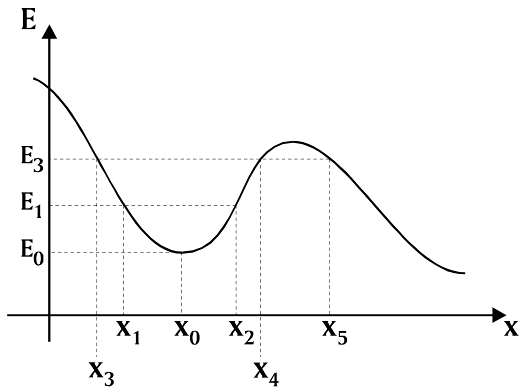
En la posición de equilibrio la energía del sistema es puramente cinética. Para $x = x_m$ (el máximo valor que puede alcanzar x) v debe ser nula y por lo tanto la energía del sistema será únicamente potencial

$$\frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

y el valor máximo del estiramiento del resorte vale :

$$x_m = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0$$

Es posible obtener una gran cantidad de información a partir de conservaciones cualitativas que hacen uso de la curva de energía potencial y de la conservación de la energía



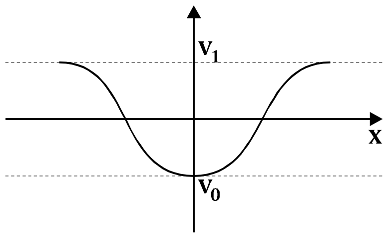
Sea $U(x)$ una función energía potencial representada por la curva de la figura 19

Dado un valor de la energía E, el movimiento estará confinado a aquella regiones del eje x para los cuales $U(x) \le E$. La diferencia entre E y $U(x)$ es igual a la energía cinética, que siempre es positiva. La mínima energía posible es E_0 , con dicha energía la partícula permanece en reposo en el punto x_0.

Cuando la partícula tiene un energía un poco mayor, E_1, puede moverse entre los puntos x_1 y x_2. Al alcanzar dichos puntos la partícula se detiene y cambia el sentido del movimiento. Recordamos que en un punto de coordenadas x la fuerza que actúa sobre la partícula es $F(x) = -U'(x)$, por lo tanto en x_2 la fuerza está orientada negativamente y en x_1 positivamente. Con una energía E_3 la partícula podrá oscilar entre x_3 y x_4 y si inicialmente tiene una posición mayor que x_5 terminará moviéndose indefinidamente hacia las x crecientes.

Un punto donde $U(x)$ tiene un mínimo es llamado punto de equilibrio estable. En dichos puntos, la fuerza que actúa sobre la partícula es nula y si ésta se encuentra inicialmente en reposo permanecerá en reposo. Si la partícula es desplazada una pequeña distancia de dicha posición experimentará una fuerza restauradora que tenderá a llevarla nuevamente a la posición de equilibrio. Un punto en que $U(x)$ es máximo se llama de equilibrio inestable. Una partícula en reposo en dicho punto permanecerá en reposo, pero un pequeño desplazamiento provocará la acción de una fuerza que tenderá a alejarla de la posición de equilibrio.

Ejercicios



1) Una partícula alfa en un núcleo está sometido a la acción de un potencial como el de la figura.

a) Describir los movimientos posibles

b) ¿Cuál es la menor energía que debería tener una partícula que obedece las ecuaciones de la dinámica clásica para escapar del núcleo?

2) La energía potencial asociada a la fuerza de interacción entre los dos átomos de una molécula diatómica tiene la forma aproximada

$$U(x) = \frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$$

donde a y b son dos constantes positivas y x la distancia interatómica.

a) Calcular la fuerza.

b) Suponiendo que un átomo es muy pesado y está en reposo y el otro se mueve en una dimensión, estudiar los movimientos posibles.

c) Calcular la posición de equilibrio y la frecuencia de las pequeñas oscilaciones del átomo más ligero suponiendo que tiene masa m.

III-6b. Caso tridimensional

Mientras que en el caso del movimiento en una dimensión la ecuación de conservación de la energía permite, como hemos visto, determinar la ley horaria $x(t)$, en el caso tridimensional la ecuación de conservación sólo permite determinar el módulo del vector velocidad.

Discutiremos en esta sección dos casos importantes por sus numerosas aplicaciones. El primero es el caso de la partícula sometida a una fuerza constante y el segundo el del movimiento central.

La energía potencial asociada a una fuerza constante $\vec{F}_0$ es

$$U(r) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_0 \cdot d\vec{r} = -\vec{F}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

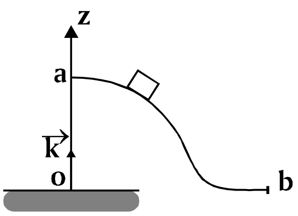
Si se toma como punto de referencia el origen de coordenadas,

$$U(r) = -\vec{F}_0 \cdot \vec{r}$$

y la ecuación de conservación establece que

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \vec{F}_0 \cdot \vec{r}$$

Ejemplo 1



Calcular la energía potencial debido al peso y resolver el ejemplo 2 de la sección IV-3) usando conservación de la energía.

$$\vec{F}_0 = -mg\vec{k}$$

$$U(z) = +mg\vec{k} \cdot \vec{r} = mgz$$

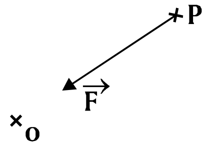
Sobre el cuerpo del Ejemplo 2 actúan dos fuerzas: el peso y la reacción normal. De esta última vimos que no realiza trabajo, de modo que podemos escribir:

$$\frac{1}{2}mv_a^2 + m\,g\,z_a = \frac{1}{2}mv_b^2 + m\,g\,z_b = \frac{1}{2}mv_b^2$$

o sea,

$$v_b = \sqrt{2 g z_a}$$

Ejemplo 2



Demostrar que las fuerzas centrales, cuya forma es

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\vec{e}_r$$

son conservativas, calcular la energía potencial asociada y escribir la ecuación de conservación de la energía.

Para probar que $\vec{F}(\vec{r})$ es conservativa verifiquemos que satisface las condiciones necesarias y suficientes

$$\frac{\partial Fx}{\partial y} = \frac{\partial Fy}{\partial x} \qquad \frac{\partial Fy}{\partial z} = \frac{\partial Fz}{\partial y} \qquad \frac{\partial Fz}{\partial x} = \frac{\partial Fx}{\partial z}$$

Tomando en cuenta que $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$, las componentes cartesianas de la fuerza son

$$F_x = \frac{x}{r}F(r)$$

$$F_y = \frac{y}{r}F(r)$$

$$F_z = \frac{z}{r}F(r)$$

donde

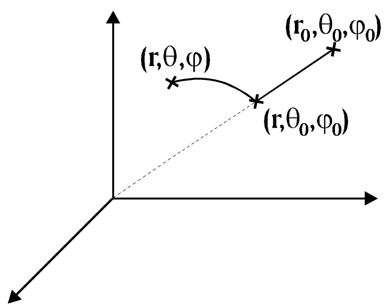
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = x\frac{d}{dr}\left(\frac{F(r)}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{xy}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{F(r)}{r}\right)$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = y\frac{d}{dr}\left(\frac{F(r)}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{xy}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{F(r)}{r}\right)$$

lo que demuestra la primera igualdad, del mismo modo que se puede verificar las otras dos, lo que prueba que $\vec{F}$ es conservativa.

Para calcular la energía potencial, elegimos un punto de referencia cuyas coordenadas esféricas son $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ e integramos yendo desde el punto de referencia hasta el punto final (r, θ, φ). Podemos elegir el camino de integración de la forma que más nos convenga. Seguimos primero la dirección radial C_1 desde $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ hasta (r, θ_0, φ_0) y luego nos movemos a lo largo de la circunferencia C_2 de radio r que va desde (r, θ_0, φ_0) a (r, θ, φ).



A lo largo de C_1

$$d\vec{r} = dr\vec{e}_r$$

$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{r_0}^{r} F(r)dr$$

A lo largo de C_2 la fuerza es en cada instante perpendicular al desplazamiento de modo que

$$\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

y por lo tanto

$$U(\vec{r}) = -\int_{C_1C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{C_0} F(r)dr = U(r)$$

y la energía potencial sólo depende en este caso de la distancia al centro $\vec{r}$.

Para el caso de la fuerza de atracción gravitacional, que es un ejemplo de fuerza central,

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r$$

$$U(r) = +\int_{r_0}^{r} \frac{GMm}{r^2} dr = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r_0}$$

Usualmente se toma el punto de referencia en el infinito, con lo cual $U(r)$ toma la forma

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

La ecuación de conservación se puede escribir

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(r) = E$$

Se define velocidad de escape de un planeta como la mínima velocidad que debe tener un cuerpo cerca de su superficie para poder llegar al infinito.

Se debe cumplir

$$\frac{1}{2}mv_E^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = -\frac{GM_T m}{\infty} + \frac{1}{2}mv_\infty^2 = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \geq 0$$

y por lo tanto

$$V_E \geq \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T} = 11.300\, m/s$$

III-7. Fuerzas no conservativas

Hemos visto varios ejemplos de fuerzas no conservativas para las cuales el trabajo depende de la trayectoria. La fricción y las fuerzas de resistencia de un fluido son ejemplos de tales fuerzas.

Una partícula puede estar sometida simultáneamente a la acción de fuerzas conservativas y no conservativas. Por ejemplo, un paracaidista está sometido a la fuerza de gravitación conservativa y la resistencia al aire no conservativa.

Se cumplirá que el trabajo total de dichas fuerzas W_T se puede escribir

$$W_T = W_C + W_{NC}$$

donde W_C es el trabajo de las fuerzas conservativas y W_{NC} el de las no conservativas. En términos de la energía potencial

$$W_T = U_1 - U_2 + W_{NC}$$

Usando el teorema de la Energía resulta

$$W_T = T_2 - T_1$$

es decir

$$W_{NC} = W' = \left(T_2 + U_2\right) - \left(T_1 + U_1\right) = E_2 - E_1$$

Donde E_2 es energía mecánica final y E_1 la inicial. En este caso la energía mecánica no se conserva: disminuirá o aumentará según que W' sea negativo o positivo. En el caso de la fricción, por ejemplo, W' siempre es negativo y la energía mecánica disminuye. Es posible ampliar el concepto de energía de modo que la energía mecánica perdida reaparezca en otra forma de energía; en el caso de la fricción se transforma en energía interna del sistema. La energía interna es una medida de las vibraciones moleculares del cuerpo y un aumento de la misma se manifestará en una elevación de la temperatura.

La conservación de la Energía se ha transformado en un principio básico que está presente en todas las ramas de la física. Él establece que la energía total es constante. En muchas ocasiones, a lo largo de la historia de la física, el principio pareció fallar, pero en todos los casos se encontraron nuevos fenómenos que lo confirman finalmente.

Ejemplo

Suponiendo que el paracaidista del Ejemplo de la sección II-6b) se lanza desde una altura de 1000 m, con una velocidad de 100 m/s, determinar la energía mecánica perdida durante la caída. Al llegar a tierra el paracaidista habrá adquirido la velocidad límite de -3m/s

Por lo tanto

$$W' = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 - m\,g\,h_1 \cong -1{,}125\times10^6\ J$$