CAPÍTULO II

DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

Antes:
"Lo que es movido necesariamente es movido por algo."

Aristóteles Metafísica.

Después:
"Si todo impedimento es excluido, el movimiento de un cuerpo sobre un plano horizontal continuará perpetuamente."

Galileo Discursos.

DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

II-1. Introducción.

El movimiento de un cuerpo cambia cuando este interactúa con otros cuerpos. Dichos cambios dependerán por un lado de las propiedades del cuerpo y por otro del medio que lo rodea. El problema central de la dinámica de la partícula es el siguiente: Dada una partícula cuyas características (masa, carga, momento magnético) son conocidas, colocada en determinadas condiciones de movimiento en cierto medio del cual se tiene una descripción completa, determinar cuál será el movimiento subsiguiente de la partícula.

II-2. Principio de inercia.

Comenzaremos analizando un problema mucho más simple. ¿qué se puede decir del movimiento de un objeto cuando éste está libre de interacciones?

La concepción dominante antes de que Galileo analizara detenidamente este problema era que para mantener un cuerpo en movimiento era necesaria la acción de alguna influencia externa. En otros términos se pensaba que si sobre un objeto no actuaban fuerzas éste permanecería en reposo.

Esta concepción parecía por otra parte muy natural, después de todo, la experiencia muestra que los objetos que se mueven sobre la superficie de la Tierra tienden al reposo cuando se les deja libres. Sin embargo, Galileo observó que si tratamos de ir más allá de la experiencia ordinaria eliminando progresivamente las fuerzas de resistencia, los cuerpos demorarían más y más en alcanzar el reposo, y extrapolando podemos sostener que si todas las interacciones pudiesen ser eliminadas el cuerpo continuaría moviéndose indefinidamente con velocidad constante. Galileo concluyó, por consiguiente, que sólo eran necesarias las interacciones para modificar el estado de movimiento de un cuerpo, no para mantener su velocidad.

El análisis de Galileo de este problema sigue siendo hoy día un ejemplo clásico de cómo se producen las Revoluciones Científicas. En efecto, basándose esencialmente en los mismos datos experimentales, Galileo y sus antecesores sacaban conclusiones diametralmente opuestas. Para unos dichos datos confirmaban que los cuerpos libres de fuerzas tienden al reposo, para el otro las mismas observaciones conducían a pensar que un cuerpo libre continuaría moviéndose indefinidamente con velocidad constante. Sólo es posible comprender este cambio de interpretación si se recuerda cómo habían cambiado los esquemas conceptuales con los que se analizaban los hechos desde la antigüedad hasta la época de Galileo. Para los Griegos, Aristóteles por ejemplo, la Tierra estaba en reposo en el centro del Universo y constituía un sistema de referencia privilegiado, para que los cuerpos se movieran era necesario que se ejerciesen ciertas fuerzas. Para Galileo, la Tierra giraba en torno al Sol y no había un sistema de referencia privilegiado. Si se deseaba describir los fenómenos que ocurrían en la superficie terrestre se podía elegir a la Tierra como sistema de referencia, pero era claro que no podía considerarse que este sistema se encontraba en reposo absoluto. De existir en el Universo un sistema en reposo absoluto y si fuera cierto como sostenía Aristóteles que las partículas libres de fuerzas tenderían al reposo, no podrían explicarse los hechos observados. Por ejemplo si soltáramos una bala de cañón de la parte más alta del mástil de un barco, en vez de caer verticalmente como en realidad observamos, debería salir disparada en alguna dirección, ya que tendería al reposo mientras que la Tierra sigue moviéndose en torno al Sol. El principio de inercia permite explicar naturalmente los hechos observados. La bala cuando es soltada continúa moviéndose con la misma velocidad que la Tierra y su cambio de movimiento posterior sólo se debe a la fuerza de gravedad.

Newton, retomó el principio de inercia y lo estableció como la primera ley del movimiento en sus Principia: "Cada cuerpo permanece en su estado de reposo, o de movimiento rectilíneo uniforme, a menos que actúen fuerzas sobre él que obliguen a cambiar de estado". Aunque este enunciado parece muy claro conviene analizarlo a fondo. Como hemos dicho en repetidas oportunidades, para que cualquier enunciado sobre el movimiento de un cuerpo tenga sentido se debe establecer en qué sistema de referencia se cumple. Al respecto conviene recordar el último ejemplo del Capítulo I, lo que en un sistema se veía como movimiento rectilíneo uniforme en el otro sistema que rotaba con respecto al primero se veía como un movimiento según una trayectoria espiral. Por esta razón en las versiones modernas de la primera ley se hace referencia y se establece:

Primera Ley de Newton.

Existen ciertos sistemas de referencia, con respecto a los cuales el movimiento de un objeto libre de fuerzas externas es rectilíneo con velocidad constante.

Los sistemas de referencia para los cuales vale la Primera Ley de Newton, también llamada principio de inercia, se llaman sistemas inerciales. En los sistemas inerciales las partículas libres tienen aceleración nula.

Como hemos visto en el Capitulo anterior, si un sistema S es inercial y S' se mueve respecto de S con un movimiento de traslación uniforme, $a_{oo'} = 0$:

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{V}_{oo'}$$

$$\vec{a}' = \vec{a} = 0$$

y una partícula libre también posee un movimiento rectilíneo uniforme visto desde S'. Por lo que podemos concluir que si S es inercial también S' lo es. Sin embargo, como ya hemos observado, si S es inercial y S' rota respecto de S, S' no es un sistema inercial, ya que como vimos en el último ejemplo del Capítulo anterior, una partícula libre seguirá una trayectoria curvilínea en S'.

Para determinar si un sistema de referencia es inercial o no se debe recurrir a la experiencia. Debido a su rotación diaria y a su interacción con el Sol y los otros planetas, la Tierra no es un sistema inercial. Sin embargo, en muchos casos estos efectos son despreciables y los sistemas de referencia unidos a nuestros laboratorios terrestres pueden sin gran error ser considerados inerciales.

Los sistemas inerciales son en definitiva sistemas de referencia ideales, todo sistema real presenta desviaciones respecto al comportamiento ideal. Un sistema muy próximo al ideal sería uno situado en el espacio a gran distancia de cualquier objeto celeste para eliminar los efectos gravitacionales y cuyos ejes están orientados apuntando a tres galaxias muy lejanas para evitar los efectos de rotación.

II-3. Fuerza y masa inercial.

La ley de inercia implica que toda fuerza produce un cambio de movimiento. Esta observación nos permitirá dar una definición cuantitativa del concepto de fuerza. Definiremos fuerza en términos de la aceleración producida sobre un objeto patrón. Se toma habitualmente como patrón un objeto, llamado el kilogramo standard al que se le asigna convencionalmente una masa de 1 kg. Luego veremos como se asignan las normas de otros objetos.

La fuerza se define midiendo la aceleración que produce sobre dicho objeto. Por ejemplo si un resorte produce al actuar sobre el kilogramo standard una aceleración de 1 m/s^2 diremos que el resorte está ejerciendo una fuerza de 1 Newton. En general si observamos que el objeto patrón tiene una aceleración a m/s^2 diremos que sobre él se está ejerciendo una fuerza de F Newtons, donde F es numéricamente igual a a.

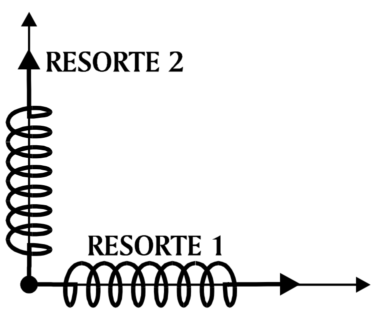


FIG. 1

Obviamente, podemos asignar a la fuerza no sólo una magnitud sino la dirección y sentido de la aceleración y asociar a la fuerza un vector. La utilidad de la noción de fuerza está asociada al siguiente hecho experimental: el vector aceleración está siempre en la dirección de la fuerza resultante. Supongamos, por ejemplo que el objeto patrón está unido a 2 resortes. El resorte 1 ejerce una fuerza de F_1 Newtons, en dirección x, es decir que si actuara solo él solo produciría una aceleración de F_1 m/s^2 según el eje x. El resorte 2 ejerce una fuerza de F_2 Newtons en la dirección del eje y, de modo que si actuara él solo produciría una aceleración de F_2 m/s^2 según y.

Se puede observar <u>experimentalmente</u> que la aceleración producida por la ación simultánea de los dos resortes es vectorialmente igual a $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Esta observación nos dice que la fuerza producida por la acción simultánea de dos interacciones es igual a la suma de las fuerzas asociadas a cada interacción. En otras palabras, ella nos dice que las fuerzas se pueden superponer linealmente.

Midiendo las aceleraciones producidas sobre el objeto patrón (el kilogramo standard) hemos podido definir cuantitativamente a las fuerzas. Estamos ahora en condiciones de definir la masa inercial de un objeto. Para ello tomemos los objetos marcados 1,2,3... cuyas masas deseamos definir. Sea m_0 la masa patrón, m_0 = 1 kg. Supongamos que bajo la acción de cierta fuerza F (por ejemplo un resorte estirado una cierta cantidad Δl) m_0 sufre una aceleración a_0. Sustituyamos ahora que el objeto patrón por el objeto cuya masa m_1 deseamos definir sin modificar el valor de la fuerza que actúa. El objeto sufrirá una aceleración a_1, definimos

$$m_1 a_1 = m_0 a_0$$

es decir

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a_1}$$

la relación entre masas es inversamente proporcional al la relación entre aceleraciones.

Se puede probar con experiencias de este tipo que si se unen dos objetos de masa m_1 y m_2 y se determina la masa del objeto resultante, ésta resulta ser igual a $m_1 + m_2$. Es decir que las masas son magnitudes aditivas. Se puede considerar a la masa inercial como una medida de la cantidad de materia del objeto.

II-4. Segunda Ley de Newton

Estamos ahora en condiciones de enunciar la Segunda Ley de Newton, ella establece que:

En los sistemas de referencia inerciales:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

donde $\vec{F}$ es la suma de todas las fuerzas resultantes, m la masa de la partícula y $\vec{a}$ su aceleración.

Habiendo definido previamente las fuerzas y las masas, la Segunda Ley de Newton es una ley experimental que establece que las masas son independientes del valor de la fuerza que se utiliza para su definición.

Obsérvese que en ausencia de fuerzas externas aplicadas sobre un cuerpo, $\vec{F} = 0$ y por lo tanto $\vec{a} = 0$, por lo que una partícula libre se moverá con movimiento rectilíneo uniforme como era establecido por la Primera Ley.

El enunciado que hemos dado de la Segunda Ley no es el más general posible, en efecto, tal como lo hemos enunciado, la Ley sólo vale cuando la masa de la partícula no varía con el tiempo. Si deseamos describir el movimiento de un cohete, por ejemplo, su masa variará con el tiempo a medida que los gases de propulsión son expulsados por la tobera. Para describir este tipo de fenómenos es necesario generalizar la Segunda Ley introduciendo la noción de momento lineal o cantidad de movimiento.

El momento lineal de una partícula se define como el producto de su masa por su velocidad

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

La versión generalizada de la Segunda Ley establece que:

En los sistemas de referencia inerciales

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

la variación de la cantidad de movimiento es igual a la fuerza que actúa sobre el objeto.

En el caso de un cuerpo libre, $\vec{F} = 0$ y $\vec{p}$ es constante.

$$\vec{p} = \vec{p}_0$$

por lo que la cantidad de movimiento de una partícula libre se conserva en el tiempo.

II-5. Las fuerzas de la naturaleza.

A los efectos de describir el movimiento de un cuerpo sometido a la influencia de ciertas interacciones mediante la aplicación de la Ley de Newton se debe sustituir cada una e las interacciones que sufre el objeto por fuerzas. Darse dichas fuerzas será equivalente a darse una función F de las propiedades de la partícula y su entorno. Todas las fuerzas distintas observadas en la naturaleza, pueden clasificarse en cuatro clases:

1) Fuerzas gravitatorias

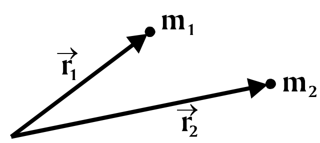
2) Fuerzas electromagnéticas

3) Fuerzas nucleares fuertes

4) Fuerzas nucleares débiles

Las dos últimas sólo intervienen en los procesos y reacciones nucleares y son las responsables de los fenómenos de fisión y fusión nuclear así como de la radioactividad. Su estudio está básicamente fuera del rango de validez de la Mecánica Clásica por lo que no volveremos a hacer referencia a las mismas en este curso.

En cuanto al primer tipo de fuerzas, todas las partículas ejercen entre sí una fuerza de atracción gravitatoria. La ley general de interacción gravitatoria, o ley de gravitación de Newton establece que la fuerza F con la que una partícula atrae a otra es proporcional al producto de las masas de las partículas, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y está dirigida según la línea que separa las dos partículas. Es decir



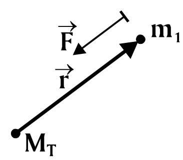
$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^2}\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|}$$

FIG. 2

donde G es una constante de proporcionalidad llamada constante de gravitación universal cuyo valor es

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\, Nm^2 / kg^2 .$$

Por ejemplo si M_T es la masa de la Tierra y m la masa de la partícula cuyo movimiento deseamos describir y si colocamos el origen de coordenadas en el centro de la Tierra



$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{mM_T}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

FIG. 3

Debido a que la constante de gravitación en el sistema M.K.S es muy pequeña, las fuerzas de gravitación son por lo general importantes sólo si interviene por lo menos un cuerpo de tamaño astronómico.

La mayor parte de las fuerzas que observamos normalmente entre objetos macroscópicos, por ejemplo las fuerzas de contacto, las fuerzas de rozamiento, así como las fuerzas ejercidas por cuerdas o resortes, son el resultado de interacciones entre las moléculas de los distintos cuerpos que intervienen y en definitiva producto principalmente de interacciones electromagnéticas.

Los fenómenos electromagnéticos se describen por medio de dos magnitudes vectoriales cuyas propiedades dependen del punto del espacio: el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r},t)$ y el campo magnético $\vec{B}(\vec{r},t)$. La fuerza que actúa sobre una partícula de carga q en presencia de dichos campos está dada por la ley de Lorentz

$$\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) = q\left[\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r},t)\right]$$

donde $\vec{r}$ es la posición de la partícula y $\vec{v}$ su velocidad.

En la mayor parte de las aplicaciones que estudiaremos en el resto del curso nos limitaremos a trabajar con fuerzas producidas por objetos macroscópicos, cuerdas, resortes, superficies rugosas, que aunque tengan un origen electromagnético, estarán descritas en cada caso por leyes de fuerza particulares. En todos los casos dichas fuerzas sólo dependerán de las propiedades cinemáticas de la partícula a través de su posición, del tiempo en el que actúa y su velocidad. Es decir que la forma más general de la ecuación de Newton para una partícula de masa m será:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right)$$

II-6. La Segunda Ley de Newton como Ley determinista.

La ecuación vectorial que se acaba de obtener en la sección anterior es desde el punto de vista matemático un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Bajo ciertas hipótesis muy generales sobre la forma de $\vec{F}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right)$, el sistema permite calcular, a partir de la posición $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ y la velocidad $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \vec{v}_0$ en cierto instante t_0, la posición de la partícula en todo instante posterior $\vec{r}(t)$ para $t > t_0$. Por consiguiente la Segunda Ley permite calcular a partir del estado de movimiento que tiene la partícula en cierto instante t_0 cuál será su movimiento futuro descrito completamente por su ley horaria $\vec{r}(t)$. Importa remarcar que el sistema de ecuaciones diferenciales determina en forma única la evolución posterior de la partícula. En otras palabras, el movimiento futuro de la partícula está únicamente determinado por la ecuación dinámica de Newton y sus condiciones iniciales. Al permitirnos predecir precisamente el comportamiento del sistema mecánico, las leyes de Newton nos dan un enorme poder sobre la naturaleza y entran en la base de una infinidad de aplicaciones tecnológicas.

En lo que sigue de esta sección y en el resto del curso analizaremos como se resuelven estas ecuaciones para muchos casos particulares de fuerzas. Pero antes vamos a dar un argumento general para mostrar como es posible determinar el movimiento haciendo uso de la ecuación de Newton.

Sea una partícula de masa m sobre la que actúan fuerzas descritas por $\vec{F}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right)$.

Supongamos que en $t = t_0$ $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \vec{v}_0$.

La ecuación de Newton permite determinar la posición y velocidad de la partícula en un instante posterior $t_0 + \Delta t$. En efecto para Δt suficientemente pequeño

$$\vec{r}(t_0 + \Delta t) = \vec{r}(t_0) + \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)\Delta t$$
$$= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \Delta t$$

y

$$\vec{v}(t_0 + \Delta t) = \vec{v}(t_0) + \frac{d\vec{v}(t_0)}{dt}\Delta t$$

$$= \vec{v}_0 + \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t_0 \Delta t)$$

$$= \vec{v}_0 + \frac{1}{m}\vec{F}(r_0, v_0, t_0)\Delta t .$$

Una vez calculada la posición y velocidad en el instante $t_0 + \Delta t$, se puede repetir el proceso tantas veces como sea necesario hasta llegar al tiempo t_1 en el cual deseamos determinar la posición de la partícula. Por supuesto se trata de un método aproximado de cálculo ya que cada vez que se incremente el tiempo en Δt se comete un error de orden Δt^2 en la evaluación de la posición y la velocidad, por lo que la evaluación sólo es exacta en el límite $\Delta t \to 0$.

Pasemos ahora a estudiar algunos casos sencillos en que es posible resolver exactamente la ecuación de Newton.

II-6a. La fuerza aplicada depende del tiempo.

En este caso la ecuación se reduce a:

$$m\vec{a} = \vec{F}(t)$$

es decir

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$

lo que determina la aceleración en función del tiempo. En el Capítulo I vimos cómo era posible determinar la ley horaria a partir de la aceleración, de la posición y velocidad en un instante dado.

Ejemplo:

Se considera el movimiento de un electrón de carga (-e) sometido a la acción de un campo eléctrico en la dirección del eje Ox:

$$E_x = E_0 \cos(\omega t + \theta).$$

Se desea determinar el movimiento del electrón, suponiendo que inicialmente está en reposo en $\vec{r}_0 = 0$.

La fuerza que actúa sobre el electrón será:

$$\vec{F} = -eE_0 \cos(\omega t + \theta)\vec{i}$$

y por consiguiente:

$$\vec{a}(t) = \frac{-eE_0}{m}\cos(\omega t + \theta)\vec{i}$$

Recordando lo estudiado en el Cap. I resulta:

$$\vec{v}(t) = \frac{-eE_0}{m\omega} sen(\omega t + \theta)\vec{i} + \vec{C}$$

y por lo tanto, como la partícula está inicialmente en reposo:

$$\vec{C} = \vec{v}(0) + \frac{eE_0}{m\omega} sen\theta\vec{i} = \frac{eE_0}{m\omega} sen\theta\vec{i}$$

es decir:

$$\vec{v}(t) = \left[-\frac{eE_0}{m\omega} sen(\omega t + \theta) + \frac{eE_0}{m\omega} sen\theta\right]\vec{i}$$

Integrando nuevamente resulta:

$$\vec{r}(t) = \frac{eE_0}{m\omega^2}\cos(\omega t + \theta)\vec{i} + \frac{eE_0}{m\omega} sen\theta t\vec{i} + \vec{C}'$$

y como el electrón estaba inicialmente en el origen

$$\vec{C}' = -\frac{eE_0}{m\omega^2}\cos\theta\vec{i}$$

y por lo tanto el electrón se mueve sobre el eje Ox con ley horaria

$$x(t) = -\frac{eE_0 \cos\theta}{m\omega^2} + \frac{eE_0}{m\omega} sen\theta t + \frac{eE_0}{m\omega^2}\cos(\omega t + \theta).$$

Los electrones de la ionósfera terrestre sometidos a la acción de ondas de radio obedecen esta ley horaria. Las oscilaciones de los electrones modifican la constante dieléctrica del medio y su índice de refracción, lo que hace que las ondas que inciden en la ionósfera con ciertos ángulos son reflejadas nuevamente hacia la Tierra.

Este efecto es inversamente proporcional a la frecuencia al cuadrado de la onda incidente por lo que ondas de muy alta frecuencia atraviesan la ionósfera.

II-6b. La fuerza aplicada depende de la velocidad.

Consideremos ahora el caso de una partícula de masa *m* que se mueve a lo largo del eje Ox bajo la acción de una fuerza dirigida según Ox que depende de la velocidad. En este caso la única componente trivial de la ecuación de Newton es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(v)$$

es decir

$$m\frac{dv}{dt} = F(v)$$

ecuación que se puede escribir en la forma

$$\frac{\dot{v}}{F(v)} = \frac{1}{m}$$

Sea $\mathsf{F}(v)$ tal que:

$$\frac{d\mathsf{F}(v)}{dv}=\frac{1}{F(v)}$$

es decir que F es una primitiva de la inversa de F.

Entonces

$$\dot{\mathsf{F}}(v)=\frac{d\mathsf{F}(v)}{dv}\dot{v}=\frac{\dot{v}}{F(v)}$$

y por lo tanto la ecuación de Newton puede escribirse

$$\dot{\mathsf{F}}(v)=\frac{1}{m}$$

ecuación que se integra inmediatamente para dar

$$\mathsf{F}(v)=\frac{1}{m}t+C$$

Como ya sabemos, C se determina a partir del conocimiento de la velocidad en $t = t_0$

$$v(t_0)=v_0$$

$$\mathsf{F}(v_0)=\frac{1}{m}t_0+C$$

y

$$\mathsf{F}(v)-\mathsf{F}(v_0)=\frac{1}{m}(t-t_0)$$

o sea

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{F(v)}=\frac{t-t_0}{m}\,.$$

De esta ecuación podemos (en un problema físico real siempre será posible hacerlo para ciertos valores de $t > t_0$) y despejar v y obtendremos:

$$v=\frac{dx}{dt}=\varphi\left(v_0\,.\,\frac{t-t_0}{m}\right)$$

ecuación que nos permitirá calcular la ley horaria

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi\left(v_0 \bullet \frac{t - t_0}{m} \right) dt$$

Por lo general las fuerzas unidimensionales dependientes de la velocidad son de origen viscoso o disipativo.

Por ejemplo, cuando un cuerpo se mueve en el seno de un líquido o un gas, éstos ejercen sobre el cuerpo una fuerza que se opone al movimiento, en otras palabras su sentido es opuesto al de la velocidad.

Ejemplo:

Un paracaidista está cayendo con una velocidad de 10 *m/s* en el instante en que se abre su paracaídas. Éste ejerce una fuerza proporcional a la velocidad $F = -bv$. Se desea determinar la constante de proporcionalidad b sabiendo que el paracaidista llega a tierra con una velocidad de 3 *m/s* y que su masa es de 75 kg.

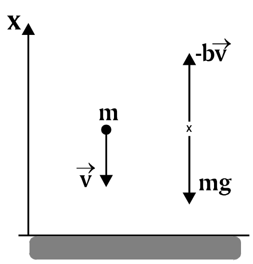


FIG. 4

La ecuación de Newton establece que:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - bv.$$

Como v es negativa, la fuerza del paracaídas se opone a la gravitación

Integrando:

$$-\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{mg + bv} = \frac{t}{m}$$

es decir

$$-\frac{1}{b} Ln \frac{(bv + gm)}{(bv_0 + gm)} = \frac{t}{m}$$

que se puede invertir

$$v = \left(\frac{(bv_0 + gm)}{b} \exp\left(-\frac{bt}{m} \right) \right) - \frac{gm}{b}$$

Obsérvese que el primer término decrece exponencialmente por lo que al cabo de un cierto tiempo la velocidad se hace constante e igual a:

$$v = -\frac{mg}{b}.$$

Si suponemos que cuando llega a tierra ya alcanzó dicha velocidad

$$b = 250\frac{Ns}{m} = 250\ kg/s$$

(hemos tomado $g \cong 10\ m/s^2$)

Obsérvese que al transcurrir o,6 segundos desde la apertura del paracaídas, el primer sumando se redujo por un factor e^{-2}.

Sustituyendo los valores numéricos resulta que

$$v = -7\exp\left(-\frac{250}{75}t\right) - 3m/s$$

que gráficamente se representa por:

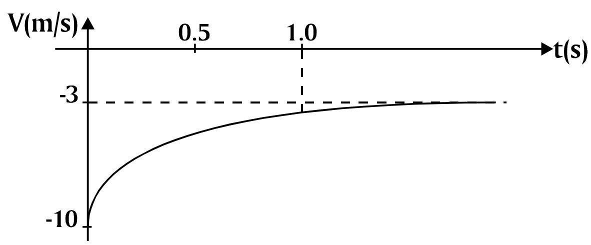


FIG. 5

y al cabo de un segundo el paracaidista prácticamente alcanzó la velocidad límite de -3 m/s.

Si deseamos calcular la distancia recorrida en el primer segundo recordemos que

$$\frac{dx}{dt} = \left(v_0 + \frac{mg}{b}\exp\left(-\frac{bt}{m}\right) - \frac{mg}{b}\right)$$

por lo tanto

$$x = x_0 - \frac{m}{b}\left(v_0 + \frac{mg}{b}\right)\left[\exp\left(-\frac{bt}{m}\right) - 1\right] - \frac{mg}{b}t$$

$$x(1)-x_0 \cong -\frac{525}{250}-3=-5{,}1m\ .$$

II-6c. La fuerza aplicada depende de la posición.

En el caso de una fuerza unidimensional dependiente de la posición, la única componente no trivial de la ecuación de Newton será

$$m\ddot{x}=F(x).$$

Sea $\mathsf{F}(x)$ una primitiva de $F(x)$, se cumplirá

$$\dot{\mathsf{F}}(x(t))=\frac{d\mathsf{F}(x)}{dx}\frac{dx}{dt}=F(x)\dot{x}$$

Por lo tanto, multiplicando la ecuación de Newton por $\dot{x}$ tendremos

$$^{\mathrm{o}}\, m\ddot{x}\dot{x}=\mathrm{F}(\mathrm{x})\dot{x}=\dot{\mathsf{F}}(x)$$

que se reescribir

$$m\frac{d\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)}{dt}=\dot{\mathsf{F}}(x)$$

y por lo tanto

$$m\frac{\dot{x}^2}{2}=\mathsf{F}(x)+C\ .$$

La constante C se determina a partir de las condiciones iniciales:

$$x(t_0)=x_0$$
$$\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0$$

y conduce a

$$m\frac{\dot{x}^2}{2}-m\frac{\dot{x}_0^2}{2}=\mathsf{F}(x)-\mathsf{F}(x_0)=\int_{x_0}^{x}F(x)dx$$

A partir de esta ecuación podemos despejar la velocidad en función de *x*

$$\dot{x}^2=\dot{x}_0^2+\int_{x_0}^{x}2\frac{F(x)}{m}dx$$

o sea

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\dot{x}_0^2 + \int_{x_0}^{x} \frac{2F(x)}{m} dx}$$

donde se debe comenzar escogiendo el signo correspondiente a la velocidad en el instante inicial para asegurar que $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = \ddot{x}_0$.

Dicho signo no cambiará mientras no se anule el radicando. Analizaremos con más detalle este tipo de fuerzas en el próximo capítulo.

Ejemplo:

Uno de los movimientos más importantes observados en la naturaleza es el movimiento oscilatorio. El ejemplo más simple de una partícula con movimiento oscilatorio se obtiene considerando una masa *m* unida a un resorte de constante *k*. Si *x* es el estiramiento del resorte, éste ejerce una fuerza restauradora

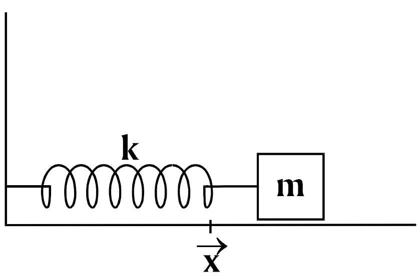


FIG. 6

$F = -kx$ que tiende a llevar la masa a la posición de equilibrio. La relación anterior, llamada Ley de Hooke describe el comportamiento de los sistemas elásticos bajo pequeñas deformaciones. Si las deformaciones son grandes y superan el llamado límite de elasticidad, las fuerzas dejan de ser proporcionales a la deformación.

Para estudiar este movimiento debemos resolver

$$m\ddot{x} = -kx$$

ecuación que conduce como hemos visto a

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\dot{x}_0^2 - \frac{2k}{m}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}\right)}$$

donde hemos supuesto que $\dot{x}_0 > 0$.

Definamos

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

y

$$\omega^2 A^2 = \dot{x}_0^2 + \omega^2 x_0^2$$

La ecuación puede ahora reescribirse

$$\frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

o sea

$$\frac{\dot{x}}{\omega\sqrt{A^2 - x^2}} = 1$$

Relación que se puede integrar

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}dt}{\omega\sqrt{A^2 - x^2}} = t - t_0$$

y haciendo el cambio de variable $x(t) = x$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega(t - t_0)$$

La integral se evalúa fácilmente considerando el cambio de variable

$$x = A\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad\qquad dx = A\cos\theta\ d\theta$$

y recordando que el signo de la raíz cuadrada debe cambiar cada vez que se anula el radicando

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \omega(t - t_0)$$

es decir

$$\theta = \omega(t - t_0) + \theta_0$$

y definiendo

$$\delta = -\omega t_0 + \theta_0$$

resulta

$$x = Asen(\omega t + \delta)$$

que es la ley horaria del movimiento armónico simple.

II-7. La tercera Ley de Newton.

Hasta ahora hemos considerado problemas en que las fuerzas que intervienen obedecen leyes de fuerzas conocidas, ya sea porque están asociadas a un campo de fuerzas como es el curso de las fuerzas gravitatorias o de las fuerzas eléctricas y magnéticas, ya sea porque representan a ciertos objetos externos que actúan sobre el sistema como es el caso de un resorte o de un fluido. Sin embargo, en muchos casos interesa estudiar el movimiento de dos o más cuerpos en interacción. La Tercera Ley de Newton permite estudiar la interacción mutua entre dos cuerpos. Ella establece que:

Si un cuerpo A ejerce sobre otro cuerpo B una fuerza $\vec{F}_{AB}$ entonces B ejerce sobre A una fuerza igual y contraria $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

Esta ley también es conocida como Ley de acción y reacción. Si la fuerza ejercida sobre el cuerpo A se denomina acción de B sobre A, entonces la fuerza que ejerce A sobre B se denomina la reacción de A sobre B.

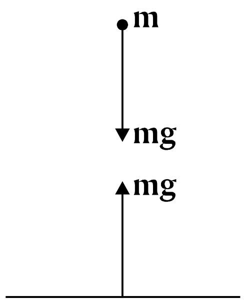


FIG. 7

Obsérvese que las fuerzas de acción y reacción nunca pueden equilibrarse entre sí, ya que actúan sobre objetos diferentes. Por ejemplo, una partícula que cae libremente sufre una fuerza dirigida hacia abajo igual a su peso. Una fuerza igual y opuesta es ejercida por la partícula sobre la Tierra. La aplicación de la Segunda Ley de Newton a la partícula nos dice que ésta tendrá una aceleración dirigida hacia abajo igual a g.La aceleración hacia arriba debida a la fuerza de la partícula sobre la Tierra será despreciable debido al enorme valor de la masa terrestre.

La Tercer Ley de Newton sólo vale en forma exacta para interacciones entre cuerpos en contacto.

Cuando las fuerzas se producen con la mediación de un campo, como en el caso de las fuerzas electromagnéticas, La Tercera Ley en general ya no es válida.

Ejercicio:

Discutir qué ocurre con la Tercera Ley en el ejemplo de la Sección II-6 de los electrones de la ionósfera acelerados por ondas de radio.

II-8. Aplicaciones simples de las leyes de Newton

II-8a- Sistemas ligados.

A partir de los ejemplos estudiados hasta el momento podría concluirse que cualquier problema de mecánica se reduce en el fondo a resolver las ecuaciones de Newton para distintas formas de las fuerzas actuantes. Esta conclusión sería por lo general incorrecta ya que en la mayor parte de los casos, los movimientos de la partícula están restringidos por vínculos y ligaduras.

Un carrito se mueve sobre el riel de una montaña rusa, las moléculas de un gas obligado a moverse en el interior de un recipiente que lo contiene, la masa de un péndulo simple que se mueve sobre una circunferencia, son los ejemplos de movimientos vinculados. Las ligaduras introducen dos tipos de dificultades, en primer lugar las coordenadas del vector $\vec{r}$ dejan de ser todas independientes y pasan a estar relacionadas por las ecuaciones de los vínculos. En segundo lugar, las fuerzas que ejercen las ligaduras (por ejemplo la fuerza del riel sobre el carrito) no se conocen y es necesario incluirlas entre las incógnitas del problema.

Para ilustrar cómo se procede al análisis de un sistema ligado, consideremos el siguiente ejemplo sumamente simple. Sea un bloque apoyado sobre una mesa horizontal sin fricción sobre el cual actúa una fuerza horizontal $\vec{F}$.

El bloque debe cumplir en su movimiento la ecuación de ligadura

$$z = 0$$

Por consiguiente además la fuerza $\vec{F}$ y el peso $-mg\vec{k}$ debe actuar una fuerza de ligadura $\vec{N}$ que asegure que la partícula permanezca en el plano. Obsérvese que, si bien hemos agregado una nueva incógnita, la fuerza $\vec{N}$ perpendicular al plano, también hemos incluido una nueva ecuación, la ligadura. De modo que las ecuaciones son:

a) Ligadura

$$z = 0$$

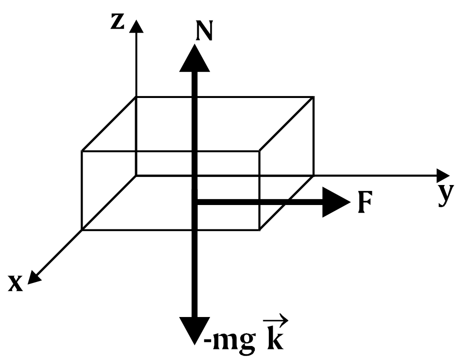


FIG. 8

b) Componentes horizontales

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

c) Componentes verticales

$$m\ddot{z} = N - mg$$

Pero $\ddot{z} = 0$ y por lo tanto $N = mg$, y las ecuaciones de Newton conjuntamente con las ecuaciones de ligaduras nos permiten determinar el movimiento y las fuerzas vinculares.

Este ejemplo sencillo ilustra cuál es la forma general de encarar los problemas dinámicos.

1) Identifíquese el cuerpo cuyo movimiento se desea estudiar.

2) Identifíquese los objetos que interactuarán con el mismo y las ligaduras a las que está sometido.

3) Elíjase un sistema de referencia inercial, fijando el origen y la orientación de los ejes con el objeto de simplificar el problema.

4) Hágase un diagrama, llamado diagrama del cuerpo libre, mostrando el sistema de referencia y todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, incluyendo aquellos que sustituyen a las ligaduras.

5) Aplíquese la Ecuación de Newton.

Ejemplo 1:

Considere las masas $m_1 \; y \, m_2$ desiguales conectadas por una cuerda que pasa sobre una polea sin fricción de masa despreciable. Encuentre la tensión de la cuerda y la aceleración de las masas.

Debemos considerar las ecuaciones de movimiento de ambos cuerpos.

Sobre m_1 actúa la aceleración gravitatoria y la cuerda, lo mismo ocurre con m_2. Las dos masas están obligadas a moverse según la dirección vertical.

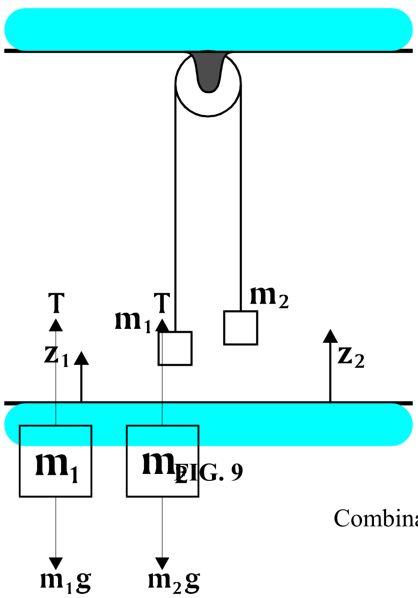


FIG. 9

FIG. 10

Elijamos un eje de coordenadas Oz orientado hacia arriba. Sea z_1 la coordenada de m_1 y z_2 la de m_2. Como ambas están unidas por la cuerda que pasa por la polea, cumplen con la condición de ligadura

$$z_1 + z_2 = \text{Constante.}$$

Los diagramas del cuerpo libre son los que se muestran en la figura.

La ecuación de movimiento para m_1 es $m_1 \ddot{z}_1 = T - m_1 g$ y para m_2: $m_2 \ddot{z}_2 = T - m_2 g$, pero debido a la ligadura:

$$\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0 \quad , \qquad \ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2 .$$

Combinando estas ecuaciones se obtiene:

$$\ddot{z}_1 = \frac{(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} g$$

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g .$$

Obsérvese que cuando $m_1 = m_2, T = mg \; y \; \ddot{z}_1 = \ddot{z}_2 = 0$.

Ejemplo 2 :

Movimiento circular.

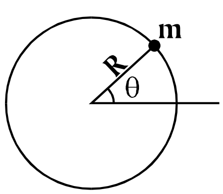


FIG. 11

Consideremos el movimiento de una partícula obligada a moverse a lo largo de una trayectoria circular.

Conviene trabajar en coordenadas polares con origen en el centro de la circunferencia. La ecuación de la ligadura es:

$$r = R$$

y por consiguiente si suponemos que sobre la masa *m* actúa una fuerza cualquiera

$$\vec{F} = F_c\,\vec{e}_r + F_T\,\vec{e}_\theta$$

Las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$-mR\dot{\theta}^2 = F_c = -m\frac{v^2}{R}$$

$$mR\ddot{\theta} = F_T$$

Vemos que F_T llamada fuerza tangencial es la responsable del cambio de la velocidad angular, mientras que F_c está dirigida hacia el centro y es responsable del cambio de dirección de la velocidad.

II-8. Fuerzas de fricción.

Existe un tipo de fuerzas que hemos ignorado hasta el momento que son muy importantes en la vida cotidiana. Cuando hay dos cuerpos en contacto tal como el caso de un libro sobre una mesa, se ejerce una fuerza que se opone al movimiento relativo entre los dos cuerpos. Supongamos por ejemplo que empujamos el libro a lo largo de la mesa, luego de ser soltado el libro disminuye su velocidad hasta detenerse. Su cantidad de movimiento disminuye debido a la acción de una fuerza opuesta al movimiento. Dicha fuerza se denomina fricción cinética y se debe a la interacción entre moléculas de los dos cuerpos en contacto.

Aunque el fenómeno de fricción, visto a nivel microscópico, es muy complicado y resulta del efecto estadístico de un gran número de interacciones, para muchos propósitos prácticos puede describirse con buena aproximación en términos de leyes empíricas muy simples.

La fuerza de fricción cinética, que se ejerce entre dos cuerpos en movimiento relativo, es proporcional a la fuerza normal de contacto entre los dos cuerpos y su dirección y sentido es opuesto al de la velocidad relativa de entre ambos

$$\vec{F}_c = \mu_c N\vec{u}r \quad \text{con} \qquad \vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

La constante de proporcionalidad se denomina coeficiente cinético de fricción y depende de los materiales en contacto.

Supongamos por ejemplo que sobre un cuerpo de masa *m* actúa una fuerza *F* que lo desplaza con respecto a la superficie de apoyo como indica la figura.

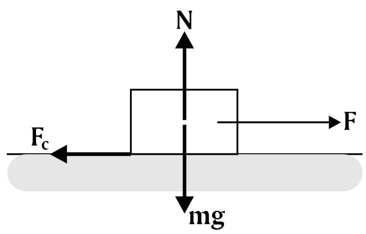


FIG. 12

Si $\vec{v}$ es el vector velocidad del cuerpo y

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

la ecuación del movimiento del cuerpo se escribe:

$$m\vec{a} = \vec{F} - \mu_c N\vec{u}_v = \vec{F} - \mu_c mg\vec{u}_v$$

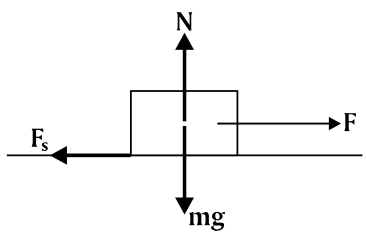


FIG. 13

En el caso en que los dos cuerpos en contacto están en reposo relativo, la fricción se opone a la puesta en movimiento de un cuerpo respecto al otro. Es decir que si se aplica una fuerza *F* suficientemente pequeña sobre un cuerpo en reposo, aparece en la superficie de contacto una fuerza igual y contraria F_S, llamada fricción estática. Los valores que puede tomar la fuerza de fricción estática están acotados por:

$$F_S \leq \mu_s N$$

donde μ_s es llamado coeficiente de fricción estática. Obsérvese que μ_s y μ_c son adimensionados y por lo general se cumple que $\mu_s > \mu_c$ para dos superficies dadas.

Ejemplo:

Se considera un cuerpo apoyado en un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. El coeficiente de fricción estática es μ_s y el cinético μ_c. Se va aumentando lentamente la pendiente del plano inclinado hasta que el bloque comienza a deslizar. a) Determinar el valor de α para el cual el bloque comienza a deslizar. b) Determinar la aceleración del bloque para ese valor de α.

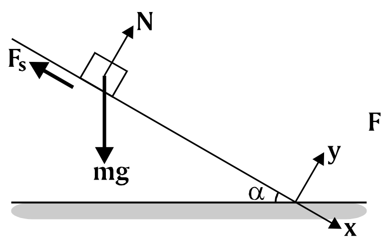


FIG. 14

Las componentes de la ecuación de Newton son:

$$\begin{cases} N - mg\cos\alpha = 0 \\ mg sen\alpha - F_s = 0 \end{cases}$$

y la condición de no deslizamiento

$$F_s \leq \mu_s N$$

es decir

$$mg \text{ sen } \alpha \leq \mu_s mg \cos\alpha$$

o sea

$tg\alpha \leq \mu_s$. Por lo tanto el cuerpo comenzará a deslizar cuando la pendiente del plano inclinado supere el valor del coeficiente estático de fricción. Una vez que el cuerpo comienza a deslizar se tendrá: $mg \text{ sen } \alpha - \mu_c mg \cos\alpha = ma$ o sea $a = g\cos\alpha\left(tg\alpha - \mu_c\right) = \dfrac{g}{\sqrt{1+\mu_s^2}}\left(\mu_s - \mu_c\right)$

II-9 Sistemas de referencia no inerciaales.

Las leyes de Newton se refieren repetidamente a los sistemas de referencia inerciales. En efecto, la primera ley establece que:

Newton I. : Cuando ninguna fuerza actúa sobre un cuerpo, su velocidad con respecto a un sistema de referencia inercial es constante.

Newton II. : En un sistema de referencia inercial, el ritmo de cambio del movimiento de una partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre ella.

La primera ley, que podemos tomar como definición de los sistemas inerciales, nos dice que miremos a los cuerpos sobre los que no actúa ninguna fuerza. En rigor, tales cuerpos no existen pues fuerzas como la de gravitación tienen carácter universal, por lo que en general se termina trabajando en sistemas suficientemente inerciales como para que las leyes valgan. Lo más parecido a un sistema inercial que se puede concebir se puede lograr alejándose de todo sistema gravitante, la tierra, el sistema solar y hasta las galaxias. En algún punto entre las galaxias y consideremos un conjunto de pequeñas objetos suficientemente alejados entre sí como para que su atracción gravitacional sea despreciable. Coloquemos el origen de nuestro sistema de coordenadas en uno de ellos y orientemos los ejes de modo que los otros se muevan con velocidad uniforme. Hemos conseguido de manera bastante poco práctica un sistema muy parecido a uno inercial.

Si lo lográramos observaríamos que las galaxias lejanas se ven como aproximadamente fijas desde nuestro sistema de referencia.

En la práctica trabajamos con sistemas más o menos inerciales según nuestras necesidades. Si somos ingenieros civiles, por ejemplo, la tierra se comporta como un sistema suficientemente inercial. Si somos meteorólogos, que trabajamos con grandes desplazamientos de las masas de aire, debemos tomar en consideración la rotación de la tierra y trabajar con un sistema con los ejes apuntando a algunas estrellas próximas. Los astrónomos en cambio deben tomar en cuenta la rotación del sol en torno al centro de la galaxia y trabajar con sistemas inerciales apuntando a las galaxias próximas.

Los sistemas inerciales son sistemas de referencia donde las leyes de Newton I y II tomen la forma particularmente sencilla que hemos mostrado. Para describir el movimiento respecto a un sistema cualquiera, vamos a relacionar la posición, velocidad y aceleración de dos sistemas que se mueven arbitrariamente uno respecto al otro.

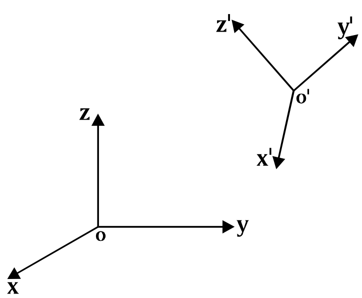


FIG. 15

Sea Oxyz un sistema de referencia inercial y O'x'y'z' un sistema que se traslada y rota respecto de Oxyz. Una partícula libre seguirá un movimiento rectilíneo con velocidad uniforme respecto de Oxyz, mientras que vista desde O'x'y'z', describirá un movimiento curvilíneo complicado por lo que el sistema O'x'y'z' no es inercial.

Recordemos lo establecido por el teorema de Roverbal, la aceleración $\vec{a}$ respecto de Oxyz y la aceleración $\vec{a}\,'$ respecto de O'x'y'z' están relacionadas por:

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_T + \vec{a}_C$$

donde

$$\vec{a}_T = \vec{a}_{OO'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right)$$

era la aceleración de transporte de la partícula y

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$$

la aceleración de Coriolis.

Sea $\vec{F}$ la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula, es decir que dicha fuerza sustituye a todas las interacciones de la partícula con el medio que la rodea.

En el sistema de referencia inercial Oxyz la dinámica de la partícula estará descrita por la segunda. Ley de Newton.

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Respecto al sistema no inercial O'x'y'z' la aceleración es $\vec{a}\,'$ y por lo tanto si

$$m\vec{a}\,' = \vec{F} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_C$$

la descripción del movimiento dado por esta ecuación coincidirá con la obtenida en el sistema inercial.

Podemos escribir la ecuación en el sistema no inercial en la forma

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{NI}$$

con

$$\vec{F}_{NI} = -m\vec{a}_T - m\vec{a}_C$$

las fuerzas $\vec{F}_{NI}$ son llamadas no inerciales o ficticias ya que no son ejercidas por ningún agente externo y aparecen solamente porque nos encontramos en un sistema no inercial. Sin embargo, un observador situado en un sistema no inercial experimentaría dicha fuerza como real, tal es el caso por ejemplo de los pasajeros de un coche que toma una curva a alta velocidad y experimenta la llamada fuerza centrífuga.

Ejemplo 1:

Para ilustrar cómo es posible describir la misma situación desde diferentes puntos de vista, uno inercial y no inercial el otro, consideremos un péndulo simple suspendido desde el vagón de un tren que sufre una aceleración $\vec{a}$ hacia adelante..

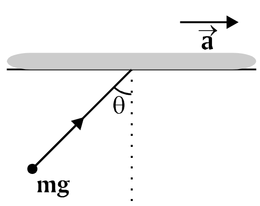


FIG. 16

Vista desde la tierra (que es un sistema aproximadamente inercial) la situación sería la siguiente:

La masa debe acelerarse junto con el vagón. Por lo tanto:

$$\begin{cases} T\cos\theta - mg = 0 \\ T sen\theta = ma \end{cases}$$

de los cuales resulta $tg\theta = \dfrac{a}{g}$

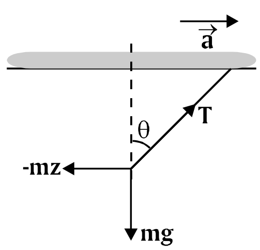


FIG. 17

En el sistema acelerado del vagón, la masa está en reposo, de modo que su aceleración relativa es $a' = 0$, pero las fuerzas se equilibran debido a la aparición de una fuerza ficticia $-ma$.

Por lo tanto las ecuaciones de Newton son idénticas a las planteadas en el sistema inercial y el ángulo de inclinación del péndulo es el mismo.

Ejemplo 2:

Hasta el momento hemos tratado en todos los ejemplos a la Tierra como sistema inercial.

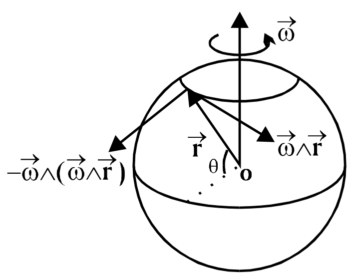


FIG. 18

Debido fundamentalmente al movimiento de rotación en torno a su eje polar con frecuencia $\omega = \dfrac{2\pi}{1dia} = 7.3\times 10^{-5}\dfrac{1}{s}$ la Tierra no es un sistema inercial.

En efecto, visto desde un sistema inercial (que no gira) situado en O, un cuerpo situado en las proximidades de la superficie de la Tierra con vector posición $\vec{r}$ respecto al centro de la Tierra está sometido únicamente a la acción gravitatoria. Es decir:

$$m\vec{a} = -G\frac{mM_T}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

donde *m* es la masa del cuerpo y M_T la de la Tierra.

La relación entre la aceleración absoluta $\vec{a}$ y la aceleración relativa a la Tierra a' estará dada por:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C$$

con

$$\vec{a}_T = \vec{a}_0 + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

y

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

ya que hemos supuesto que el sistema inercial tiene origen en O y la velocidad angular es aproximadamente constante.

Por lo tanto, la ecuación de Newton en el sistema de la Tierra se escribe:

$$m\vec{a}' = -G\frac{mM_T}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

La llamada aceleración de la gravedad $\vec{g}$ se define como

$$\vec{g} = -\frac{GM_T}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} - \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

y debido a la aceleración de arrastre o centrífuga no está dirigida hacia la Tierra.

La dirección de $\vec{g}$ define lo que se llama la vertical y se aparta ligeramente de la dirección radial. Calculemos la aceleración centrífugo a 35º de latitud, $\theta = 35^{\circ}$.

$$\left|\vec{\omega}\times\vec{r}\right| = \omega r sen\left(90-\theta\right) = \omega r\cos\theta$$

y

$$\left|\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\right| = \omega^2 r\cos\theta = 3{,}3.\cos 35^{\circ}\times 10^{-2}\, m/s^2$$

donde *r* es el radio de la Tierra,

$$r = 6{,}37\times 10^6\, m$$

Consideremos ahora el término de Coriolis. Deseamos estudiar sus efectos sobre un cuerpo que se mueve en un plano horizontal, en una latitud θ vertical.

La velocidad angular divisada según el eje de la terna forma un ángulo λ con el plano horizontal.

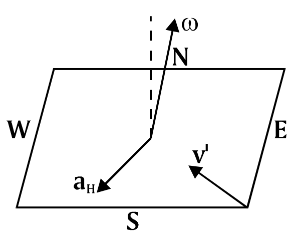


FIG. 19

Su componente vertical es nula.

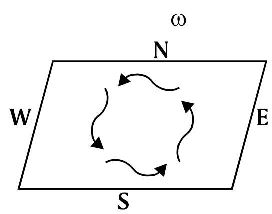
$$\omega_v = \omega \operatorname{sen}\lambda$$

y la horizontal :

$$\omega_h = \omega\cos\lambda$$

La componente horizontal de ω producirá una aceleración de Coriolis según la vertical cuyo efecto es despreciable en comparación con la aceleración de la gravedad y la componente vertical de ω producirá una desviación de la partícula de valor:

$$\vec{a}_H = 2\vec{\omega}_v\times\vec{v}' \ , \qquad \left|\vec{a}_H\right| = 2\omega sen\lambda v'$$



El efecto de la aceleración de Coriolis puede verse en la formación de remolinos en los huracanes. Si se desarrolla un centro de baja presión en la atmósfera, el aire fluye hacia esa región.

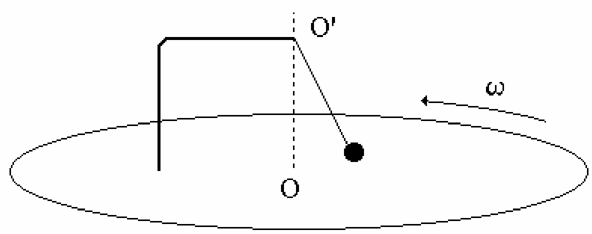
La fuerza no inercial debida a la aceleración de Coriolis desvía las moléculas de aire hacia la derecha en hemisferio norte dando lugar a la formación del vórtice que gira en sentido contrario a las agujas del reloj.

En el hemisferio sur ω_v es negativa y el sentido del vórtice del huracán es por consiguiente según las agujas del reloj.

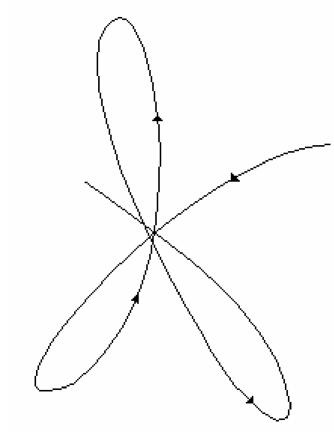
Ejemplo 3:

Péndulo de Foucault.

Se coloca un péndulo sobre una tabla rotatoria de modo que este suspendido de O' que se encuentra sobre la vertical que pasa por el centro de la tabla. Se hace rotar la mesa con el pendulo en reposo y luego se le imprime una velocidad a la masa m; el movimiento respecto al sistema inercial sera en un plano. Respecto a la mesa rotatoria aparecera un termino de Coriolis



$-2\vec{\omega} \times \vec{v}$ que impartira a la masa una aceleracion tangencial. El observador parado en la mesa vera que el pendulo describe un movimento como el mostrado en la figura.



Como la tierra no es un sistema inercial y rota una vuelta cada 24hs. en torno al aje polar, un observador situado en la superficie terrestre observara en un pendulo un efecto similar al de la

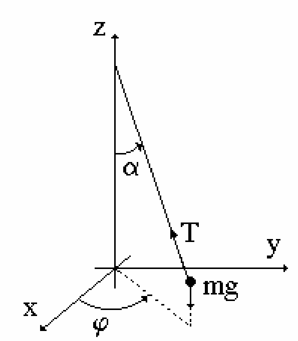


figura.

$z = l - l\cos\alpha$ $\alpha << 1$ pequenas oscilaciones $x = l\text{sen}\alpha\cos\varphi$ $\text{sen}\alpha \approx \alpha$ $y = l\text{sen}\alpha\text{sen}\varphi$ $\cos\alpha \approx 1$ por lo tanto

$z \approx 0$, $\frac{x}{l} << 1$, $\frac{y}{1} << 1$ $T_x = -T\text{sen}\alpha \cos\varphi = -\frac{Tx}{l}$ $T_y = -T\text{sen}\alpha\text{sen}\varphi = -\frac{Ty}{l}$

$T_z = T\cos\alpha \approx T$ La ecuacion de Newton en el sistema terrestre establece que:

$$\vec{T} + mg\vec{k} - 2\vec{\omega} \times \vec{V}_R = m\vec{a}_R$$

Si tomamos $\vec{k}$ según la normal saliente y $\vec{i}$ en la direccion tangente al meridiano por el punto.

$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_z\vec{k}$$

$\omega_x \approx -\omega\cos\alpha_L = -\omega\cos 35^o$

$\omega_z = -\omega\text{sen}\alpha_L = -\omega\text{sen}35^o$

con $\omega = \frac{2\pi}{86400s} \approx 7{,}3 \times 10^{-5}\,\frac{rad}{s}$

$\vec{\omega} \times \vec{V}_R = \left(\omega_x\vec{i} + \omega_z\vec{k}\right) \times \left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}\right) = -\omega_z\dot{y}\vec{i} + \omega_z\dot{x}\vec{j} + \omega_x\dot{y}\dot{k}$

$m\ddot{x} = T_x + 2m\omega_z\dot{y}$, $m\ddot{y} = T_y + 2m\omega_z\dot{x}$, $0 = T - mg - 2m\omega_x\dot{y}$ Por lo tanto: $T_x = -\frac{Tx}{l} = -\frac{mgx}{l} - \frac{2m\omega_x\dot{y}x}{l} \approx -\frac{mgx}{l}$ ya que el segundo sumando es de orden α^2 .

analogamente $T_y = -\frac{mgy}{l}$. Y sustituyendo en la ecuacion de Newton

resulta: $\ddot{x} = -\frac{gx}{l} + 2\omega_z\dot{y}$, $\ddot{y} = -\frac{gy}{l} - 2\omega_z\dot{x}$

$\frac{g}{l} = \omega_o^{\ 2}$ caracteriza la frecuencia de las oscilaciones del pendulo. $\ddot{x} + \omega_0^{\ 2}x = 2\omega_z\dot{y}$ $\ddot{y} + \omega_0^{\ 2}y = 2\omega_z\dot{x}$

Si $\omega_z = 0$ (en el ecuador por ejemplo) se recuperan las pequenas oscilaciones usuales del pendulo.

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales se introduce la variable compleja: $q = x + iy$. Entonces, multiplicando la segunda ecuacion por i y sumando se obtiene: $\ddot{q} + \omega_0^2 q = -2\omega_z i\dot{q}$ que admite soluciones de la forma: $q = Ae^{\beta t} \quad A, \beta \quad \text{constantes}$. Donde se debe cumplir que: $\beta^2 + \omega_0^2 + 2i\omega_z\beta = 0$.

$\beta = -i\omega_z \pm \sqrt{-\omega_z^2 - \omega_0^2}$, como $\omega_z << \omega_0$, $\beta \approx -i\omega_z \pm i\omega_0$. Por lo tanto: $q(t) = (\cos\omega_z t - i\operatorname{sen}\omega_z t)\left[(A+B)\cos\omega_0 t + i(A-B)\operatorname{sen}\omega_0 t\right]$

Para el analisis del movimiento, tomamos condiciones iniciales tales que A-B=0, de este modo el desplazamiento de la masa en t=0 es segun el eje Ox.

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= 2A\cos\omega_0 t\cos\omega_z t \\ y(t) &= -2A\cos\omega_0 t\operatorname{sen}\omega_z t \end{aligned}}$$

El periodo de rotacion en el plano horizontal es $T = \dfrac{2\pi}{\omega_z}$.