CAPITULO I

CINEMÁTICA DE LA PARTICULA

"La naturaleza es una esfera infinita cuyo centro está en todas partes y su circunferencia en ninguna"

Blas Pascal Pensamientos.

"*No definiré tiempo, espacio y movimiento ya que estos conceptos son bien conocidos por todos"*

Isaac Newton Principia (1686).

"Tiempo

Más tiempo

¿Solo tiempo?"

Jorge Guillen Homenaje.

Curso 1999

CINEMÁTICA DE LA PARTICULA

I-1. Introducción

La Mecánica es la rama de la Física que estudia el movimiento de los cuerpos materiales. Históricamente es la primera de las ciencias exactas de la naturaleza y por lo tanto es un paradigma de toda actividad científica. Más aún, la Tecnología moderna y sus inmensas posibilidades de transformación del mundo resultan de la aplicación sistemática del método científico. Por esta razón, más allá del interés que sin duda tiene el transmitir un conjunto de conocimientos útiles para la actividad profesional del ingeniero, este curso de Física, como todos los restantes, tiene el objetivo fundamental de lograr que los estudiantes adquieran la capacidad de analizar y resolver los problemas que enfrenten en su actividad profesional con esa mezcla de rigor e imaginación propia de la ciencia.

El primer obstáculo que debe superar toda ciencia empírica para su desarrollo es el de poner orden en nuestras sensaciones extraordinariamente ricas y fugaces. Platón fue el primero en observar que nada podríamos decir acerca de las percepciones fluidas de nuestros sentidos si no pudiéramos captar en ellas relaciones permanentes proyectadas por nuestra razón. El pensamiento debe ir eliminando factores accesorios o accidentales y con la ayuda de objetos geométricos y matemáticos debe intentar describir los fenómenos que ante nosotros fluyen sin cesar. Platón se limitó a enunciar el programa de las ciencias empíricas. Había que esperar hasta la llegada de la época moderna, para que hombres como Kepler, Galileo y Newton lo llevaran a cabo.

El primer problema al que se ve enfrentada la Física al buscar una descripción precisa del movimiento es por consiguiente el de eliminar todos aquellos factores que son accesorios y el de encontrar el lenguaje matemático más apropiado. La máxima realización de este programa alcanzada en la antigüedad es la descripción de Ptolomeo del movimiento planetario. Resulta natural que la primera descripción con cierto grado de exactitud de un fenómeno se refiera al movimiento planetario. En efecto, los datos de la observación son sumamente simples (debido a la distancia entre los objetos celestes y la Tierra, es fácil tratar a los primeros como objetos puntuales). Por otra parte, sus movimientos son muy regulares y periódicos. Basándose en las nociones de la geometría de Euclides y en la idea platónica de la perfección de la circunferencia, Ptolomeo llega a una descripción del movimiento planetario en términos de partículas puntuales que ocupan posiciones sucesivas en el espacio a medida que el tiempo transcurre. Los elementos esenciales de la descripción cinemática del movimiento de las partículas materiales ya están presentes en el esquema de Ptolomeo.

Sólo faltaba incorporar la idea de la Relatividad del Espacio que aparecería con Copérnico y sería enunciada en forma explícita por Galileo. En efecto, para Ptolomeo todo movimiento debe describiese con referencia a la Tierra que se encuentra en reposo en el centro del Universo. Al mostrar la enorme simplificación conceptual que resultaba al referir el movimiento de los planetas en torno al Sol, Copérnico estaba implícitamente mostrando que el sistema de referencia respecto al cual se describe el movimiento depende en definitiva de nuestra conveniencia y que por lo tanto no existe un sistema privilegiado.

En este Capítulo introduciremos los elementos matemáticos básicos para la descripción del movimiento de una partícula.

La parte de una teoría física que introduce el lenguaje necesario para la descripción de los fenómenos que estudia se llama la Cinemática. Todo fenómeno que se encuentra dentro del rango de aplicación de la Teoría debe ser expresable en dicho lenguaje. Así, la Cinemática de las Partículas Materiales debe ser capaz de describir cualquier movimiento posible de una partícula en el espacio tridimensional.

El segundo elemento básico presente en cualquier teoría física es la Dinámica. Ella establece las leyes que obedecen los fenómenos físicos. En particular, la Dinámica de las partículas Materiales nos permitirá determinar, en una situación dada, cuál de todos los movimientos cinemáticamente posibles seguirá la partícula en cuestión.

I-2. Cinemática en una dimensión.

I-2a. Movimiento sobre una recta.

Como hemos observado, los movimientos reales son muy complejos. En general las distintas partes de un objeto tendrán movimientos diferentes, lo que puede dar lugar a rotaciones o vibraciones internas. En muchos casos esos movimientos internos pueden despreciarse cuando sólo interesa determinar el movimiento promedio del cuerpo En general, cuando las dimensiones del objeto en cuestión son mucho menores que las de su trayectoria, podemos considerar al objeto como un punto matemático. Los objetos de este tipo se denominan partículas. Por ejemplo cuando deseamos describir el movimiento de la Tierra alrededor del Sol podemos despreciar los movimientos internos de la atmósfera y los mares e incluso su movimientos de rotación y tratarlo como un objeto puntual.

¿Cómo podemos describir el movimiento de una partícula que se mueve sobre una recta?

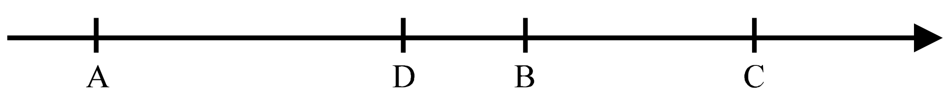


FIG. 1

Una primera descripción es establecer la hora en la cual la partícula pasa por cada uno de los puntos.

	Tiempo	**Posición**
Día 29/7/89	14 h. 27 m. 30 s.	A
" "	14 h. 27 m. 34 s.	B
" "	14 h. 28 m. 36 s.	C
" "	14 h. 28 m. 38 s.	D

Tabla 1

En esta primera descripción sólo hemos podido asignar un valor numérico al tiempo, mientras que nos hemos limitado a distinguir las distintas posiciones con una letra. Para asignar valores numéricos es necesario un origen, ya que solo somos capaces de medir intervalos, no posiciones o tiempos absolutos. Como existe un origen convencional de tiempo hemos podido asignar valores numéricos a dichas variables.

Si deseamos hacer lo mismo con el espacio es necesario definir un origen.

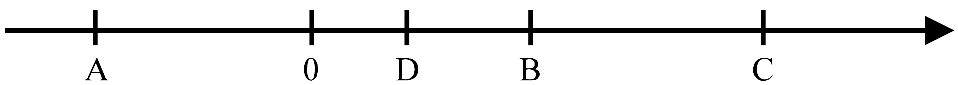


FIG. 2

Construyamos ahora un sistema coordenado orientando la recta. A cualquier punto de la recta le asignaremos un número x que indique su distancia al origen. El valor x es la posición con respecto a O. Será positivo si el punto sigue a O y negativo si lo precede. Podemos entonces describir el movimiento por

Tiempo	**Posición**
0 s.	-4 m.
4 s.	8 m.
6 s.	12 m.
8 s.	4 m.

Tabla 2

donde hemos tomado el origen de tiempos en el instante en que la partícula pasaba por A.

Si representamos este movimiento gráficamente poniendo en la abscisa los tiempos y en las ordenadas la posición resulta

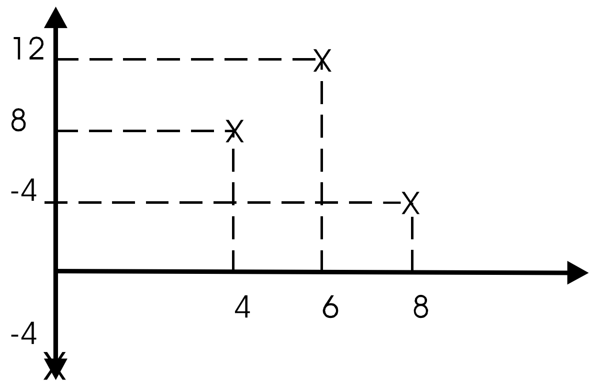


FIG. 3

La descripción que hemos obtenido del movimiento es sin duda incompleta ya que obviamente no nos da información alguna sobre qué posiciones ocupa la partícula para otros valores del tiempo. Nuestra descripción mejora por consiguiente en la medida que disminuyen los intervalos de tiempo para los cuales se determina la posición. Una descripción completa del movimiento en una dimensión consistirá entonces en darse una función $x(t)$ que asigne a cada valor del tiempo la correspondiente posición de la partícula.

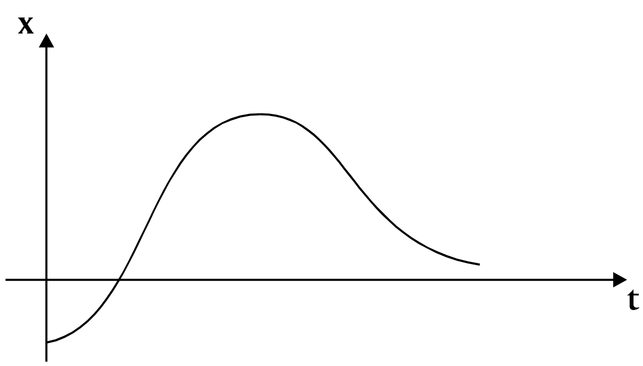


FIG. 4

Toda la información relacionada con el movimiento de la partícula está contenida en la función $x(t)$ llamada ley horaria. Sin embargo aunque la posición en función del tiempo contiene toda la información relevante no la contiene en la forma más útil. La información del velocímetro de un auto es redundante si este último tiene cuenta kilómetros y reloj, pero pocos discutirían su utilidad. Ello se debe a que las leyes de la dinámica involucran los conceptos de aceleración y velocidad y no a la posición directamente.

Pasemos a definir estos conceptos.

Supongamos que una partícula se encuentra en la posición x_1 en un instante t_1 y en x_2 en el instante t_2 .

La variación de la posición de la partícula se denomina desplazamiento.

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Se define la velocidad media de la partícula v_m en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ por

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Consideremos por ejemplo el movimiento definido por la tabla 2 y graficado en la figura 3. Del mismo resulta la siguiente tabla de velocidades medias

Intervalos	v_m
[0 s.,4 s.]	3 m/s
[4 s.,6 s.]	2 m/s
[6 s.,8 s.]	-4 m/s

Tabla 3

y el gráfico

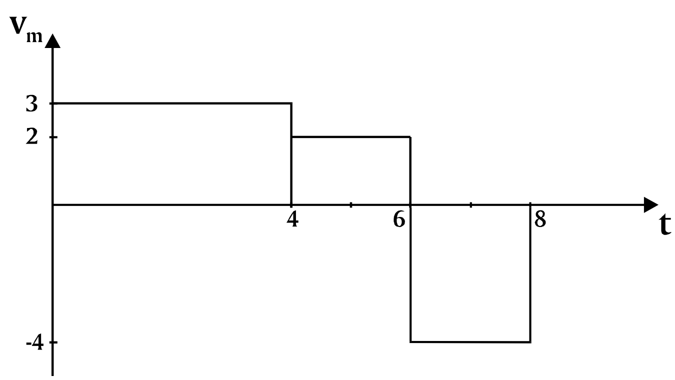


FIG. 5

El desplazamiento y la velocidad pueden ser positivos o negativos, un valor positivo indica un desplazamiento en el sentido del eje de coordenadas y uno negativo en el sentido opuesto. Obsérvese que la velocidad media se puede leer directamente del gráfico del movimiento (fig. 3) calculando la pendiente de la recta que une dos puntos sucesivos en el movimiento.

Si se tiene una descripción del movimiento más detallada que incluya las posiciones para instantes intermedios de tiempo, se podrá construir una tabla de velocidades donde cada velocidad media correspondería a intervalos más pequeños. En el límite tendremos una descripción completa $x(t)$ y una velocidad asociada al instante t

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

La velocidad instantánea $v(t)$ es, por consiguiente, la derivada de la posición. Gráficamente estará dada por la pendiente de la curva $x(t)$ en el instante t.

Pasemos ahora al cálculo de la aceleración, concepto fundamental que está relacionado directamente con las fuerzas que actúan sobre la partícula, como veremos en capítulos subsiguientes.

Cuando la velocidad instantánea de una partícula esté variando con el tiempo, se dice que la partícula se está acelerando. La aceleración media producida en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ se define como el cociente

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

donde Δv es la variación de la velocidad instantánea en dicho intervalo. La aceleración instantánea es el límite de la aceleración media cuando el intervalo tiende a cero

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Como la velocidad es a su vez la derivada de la posición respecto del tiempo, la aceleración resulta ser la derivada segunda de la posición respecto del tiempo.

Como habíamos señalado al comienzo, una vez determinada la posición en función del tiempo se posee toda la información relevante para la evaluación de cualquier otra magnitud cinemática.

Usualmente el problema más interesante es el problema inverso: dada la aceleración instantánea $a(t)$, determinar la posición de la partícula en función del tiempo $x(t)$. En efecto la aceleración es la magnitud que aparece en la ecuación de Newton y por lo tanto cuando las fuerzas dependen explícitamente del tiempo, se puede determinar directamente. Para calcular la posición debemos invertir el proceso anterior pasando de la aceleración a la velocidad y de ésta a la posición.

Obviamente dada $a(t)$ la velocidad será una función tal que su derivada es igual a la aceleración: $v(t)$ será por lo tanto una primitiva de $a(t)$.

$$v(t)=\mathrm{A}(t)+C\,, \qquad \frac{d\mathrm{A}(t)}{dt}=a(t).$$

Por consiguiente dada la aceleración, la función velocidad queda determinada a menos de una constante. En otras palabras, la aceleración no tiene información suficiente para determinar a la velocidad en forma única. Sin embargo veremos que basta conocer la velocidad en cualquier instante de tiempo para eliminar toda ambigüedad en la función $v(t)$. Supongamos que en $t = t_0$ la velocidad es v_0

$$v(t_0)=v_0=\mathrm{A}(t_0)+C$$

entonces

$$C=-\mathrm{A}(t_0)+v_0$$

y

$$v(t)=v_0+\mathrm{A}(t)-\mathrm{A}(t_0)$$

lo que determina completamente a $v(t)$. Recordando el Teorema Fundamental del Cálculo Integral resulta

$$\mathrm{A}(t)-\mathrm{A}(t_0)=\int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

y por lo tanto

$$v=v_0+\int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

Ejemplo:

Sea $a(t)=2t\,m/s^2$. Determinar $v(t)$ sabiendo que en $t_0 = 2s$ la velocidad vale $v_0 = -3\ m/s$.

$$v(t)=t^2+C$$

$$-3 = 4 + C$$

$$v(t)=(t^2-7)m/s.$$

Una vez que ha sido determinado $v(t)$, el problema de calcular $x(t)$ se resuelve en forma totalmente análoga

$$x(t)=\mathrm{V}(t)+C' \ , \ \frac{d\mathrm{V}}{dt}=v(t)$$

donde la constante C' se determina a partir de la posición de la partícula en algún instante t_0

$$x(t_0)=x_0=\mathrm{V}(t_0)+C'$$

y

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} v(t)dt.$$

Podemos concluir por lo tanto que la aceleración instantánea permite reconstruir la ley horaria $x(t)$ a menos de 2 constantes.

Gráficamente, dada la curva de velocidades, el desplazamiento producido en el intervalo $[t_0, t_1]$

$$\Delta x=x(t_1)-x(t_0)=\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$

es igual al área encerrada bajo la curva de velocidades.

Análogamente, el área encerrada bajo la curva de aceleraciones $a(t)$ es igual a la variación total de velocidad a lo largo del intervalo de tiempo considerado.

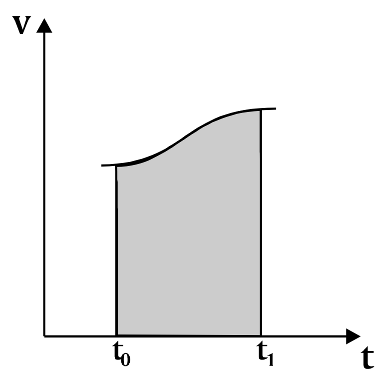


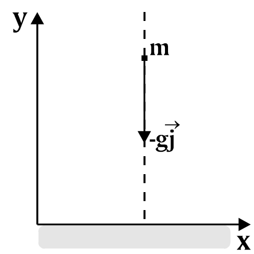
FIG. 6

Concluiremos esta sección considerando el ejemplo del movimiento con aceleración constante, supongamos conocida la velocidad y la posición en $t_0 = 0$.

$$a(t) = a$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)dt = v_0 + at$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + at)dt = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$



Un caso particular importante de este tipo de movimientos es la caída libre de una partícula en presencia del campo gravitacional en las proximidades de la superficie terrestre.
Si orientamos el eje de coordenadas según la vertical ascendente y nos limitamos al estudio de la caída vertical de una partícula, se cumple: $a = -g$, donde g representa el valor de la aceleración de la gravedad que es aproximadamente igual a $9{,}8\ m/s^2$.

I-3. Cinemática en 3 dimensiones.

I-3a. Movimiento general de una partícula en 3 dimensiones

En el caso unidimensional era necesario para describir el movimiento en forma única fijar un origen y una orientación de la recta. En el caso general, la posición de una partícula en un instante de tiempo t_0 se describirá por un vector $\vec{r}(t_0)$ que va del origen de coordenadas al punto que ocupa la partícula en dicho instante.

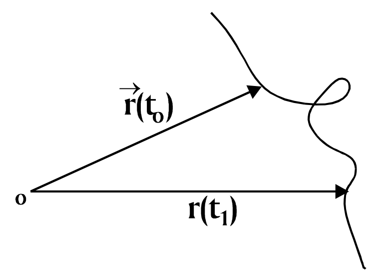


FIG. 8

Deseamos asignar al vector posición un conjunto de medidas que lo caracterizan únicamente. Una forma sencilla de conseguir este objetivo es definiendo un sistema de ejes cartesianos rectangulares Oxyz.

Sean $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ los vectores de la base *ortonormal directa* [1]asociada a dichos ejes. Es decir que se verifica que:

- La base es normal, por lo que está formada por versores: $\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1$.
- Son ortogonales entre sí: $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.
- Y la base es directa porque: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

El vector posición puede describirse pos sus componentes en dicha base, que de acuerdo a la regla de suma vectorial cumplirá:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Analizando el problema en forma totalmente análoga al caso unidimensional concluiremos que una descripción completa del movimiento estará dada por su ley horaria

[1] - Por algunos detalles adicionales ver la Sección 0.3.b.ii en el *Capítulo 0 – Introducción y Conceptos Preliminares*.

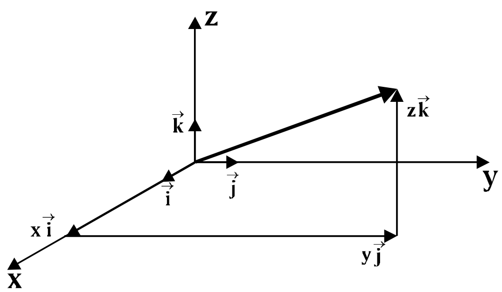


FIG. 9

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

Los valores específicos de las componentes (x,y,z) de la posición de una partícula dependerán obviamente del sistema de referencia elegido. No existe ningún criterio absoluto para preferir un sistema frente a otro, la elección es materia de gusto o más bien conveniencia. Dice Newton en los *Principia*: "Pero a causa de que las partes del espacio no pueden ser vistas o distinguidas entre sí por nuestros sentidos, utilizamos en su lugar medidas sensibles de él ... y así en vez de posiciones y movimientos absolutos, los utilizamos relativos".

I-3b. Desplazamiento, velocidad y aceleración

Estamos ahora en condiciones de introducir los conceptos de desplazamiento, velocidad y aceleración en el caso de un movimiento general de 3 dimensiones.

I-3b.i) Desplazamiento y Velocidad.

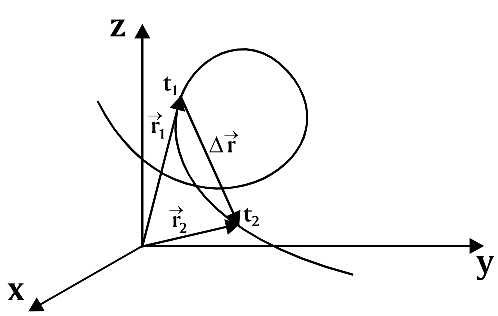


FIG. 10

El desplazamiento sufrido por la partícula en el intervalo $[t_1,t_2]$ es el vector asociado al segmento orientado que va del punto ocupado por la partícula en t_1 al punto ocupado en t_2

Obviamente

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$$

Se define la <u>velocidad media</u> de la partícula en el intervalo (t_1,t_2) como el cociente del vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

La velocidad media no es por lo general una magnitud interesante ya que el módulo del vector desplazamiento no es en general igual a la distancia recorrida sobre la curva. Sin embargo si consideramos intervalos de tiempo cada vez más pequeños, el módulo del desplazamiento se aproxima a la distancia recorrida por la partícula y su dirección tiende a coincidir con la dirección del vector tangente a la curva en el punto P_1 ocupado por la partícula en el tiempo t_1 .

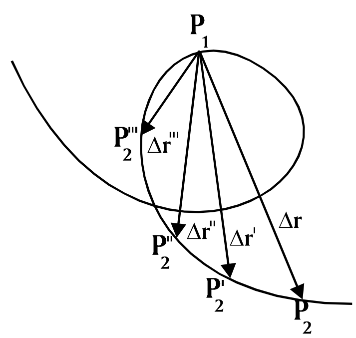


FIG. 11

Se define el vector <u>velocidad instantánea</u> como el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

dicho límite es la derivada del vector P respecto de t.

Para calcular las componentes de la velocidad consideremos

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Si pasamos de t a $t + \Delta t$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = x(t+\Delta t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} + z(t+\Delta t)\vec{k}.$$

El desplazamiento que se produjo en el intervalo $[t, t+\Delta t]$ es

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) =$$

$$= [x(t+\Delta t) - x(t)]\vec{i} + [y(t+\Delta t) - y(t)]\vec{j} + [z(t+\Delta t) - z(t)]\vec{k} =$$

$$= \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

y por consiguiente

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k} \right] =$$

$$=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

que nos dice que las componentes de la derivada de un vector son las derivadas de las componentes.

I-3b.ii) Propiedades de la Derivada de un Vector.

La demostración anterior realizada para la derivada del vector posición vale para cualquier otro vector, y por consiguiente dado

$$\vec{A}(t)=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

su derivada es

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}=\frac{dA_x}{dt}\vec{i}+\frac{dA_y}{dt}\vec{j}+\frac{dA_z}{dt}\vec{k}$$ [2]

Usando la propiedad que acabamos de establecer, las siguientes expresiones, que nos dan las derivadas de operaciones con vectores, son de fácil demostración:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{A}(t)+\vec{B}(t)\right]=\frac{d\vec{A}}{dt}(t)+\frac{d\vec{B}}{dt}(t)$$

$$\frac{d\left(\vec{A}.\vec{B}\right)}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B}+\vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\lambda(t)\vec{A}(t)\right]=\frac{d\lambda(t)}{dt}\vec{A}+\lambda(t)\frac{d\vec{A}}{dt}$$

donde $\vec{A},\vec{B}$ son funciones vectoriales de t, y λ es una función escalar ordinaria de t.

[2] - Como veremos en breve, ésta es en realidad la derivada de un vector *respecto* al sistema de referencia elegido, dado por la base $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. En este sistema de referencia esos vectores deben considerarse *fijos*, es decir, los mismos no dependen del tiempo, y sus derivadas son nulas. De lo contrario, habría que derivarlos como si fuesen ellos mismos vectores dependientes del tiempo.

Las propiedades anteriores nos resultarán de gran utilidad y de aplicación muy frecuente en el resto del curso.

I-3b.iii) Aceleración.

Pasemos ahora a la definición de la aceleración instantánea.

El vector <u>aceleración instantánea</u> se define como la derivada del vector velocidad instantánea respecto del tiempo

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

en componentes

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

I-3b.iv: Notación para la Derivada Temporal.

Como vemos, en la definición de las cantidades Cinemáticas Velocidad y Aceleración, el concepto de derivada respecto al tiempo es de suma importancia. Es por eso, y por lo frecuente del uso que les daremos, que introduciremos ahora una notación que nos simplificará mucho las expresiones que usaremos todo a lo largo de este curso. Utilizaremos *puntos* para indicar la derivación respecto al tiempo, escribiendo el punto encima de la función que debe ser derivada, y el número de puntos indica del número de veces que estamos derivando, o sea, si se trata de una derivada primera, segunda, etc. Así:

$$\frac{dA_x}{dt} = \dot{A}_x$$

$$\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k} = \dot{A}_x\vec{i} + \dot{A}_y\vec{j} + \dot{A}_z\vec{k}.$$

Aplicándolas a las cantidades de nuestro interés tenemos:

$$\boxed{\begin{array}{c}\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}\\ \vec{a}=\dot{\vec{v}}=\dot{v}_x\vec{i}+\dot{v}_y\vec{j}+\dot{v}_z\vec{k}=\ddot{\vec{r}}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}\end{array}}$$

Estas expresiones son particularmente útiles para el cálculo directo de la velocidad y la aceleración.

Ejemplo:

Sea

$$\vec{r}=R\cos\omega t\,\vec{i}+R\,\text{sen}\,\omega t\,\vec{j}$$

donde R y ω son dos constantes, $\vec{r}(t)$ describe el movimiento de una partícula en el plano Oxy.

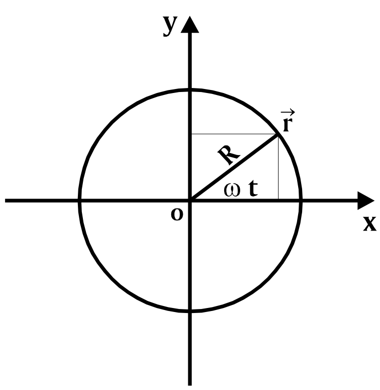


FIG. 12

Como $x^2(t)+y^2(t)=R^2$ la partícula se mueve en una circunferencia. Entonces

$$\vec{v}=-R\omega\,\text{sen}\,\omega t\,\vec{i}+R\omega\cos\omega t\,\vec{j}$$

y

$$\vec{a}=-\omega^2R\cos\omega t\,\vec{i}-\omega^2R\,\text{sen}\,\omega t\,\vec{j}$$

Obsérvese que $|v| = R\omega$ es constante y su dirección es tangente a la circunferencia, mientras que

$$\vec{a}=-\omega^2\vec{r}$$

tiene la dirección del radio.

I-3b.v: Trayectoria. Ley Horaria e Integración de Ecuaciones.

Al lugar geométrico de los puntos ocupados por una partícula en su evolución temporal lo llamamos trayectoria. En el ejemplo precedente la trayectoria de la partícula es una circunferencia de radio R. Siempre es posible determinar a partir de la ley horaria $\vec{r}(t)$ la trayectoria de la partícula. En efecto las componentes del vector posición $(x(t),y(t),z(t))$ son por sí mismos una descripción paramétrica de la curva seguida por la partícula.

Consideremos ahora el problema inverso. Dado el vector aceleración $\vec{a}(t)$ nos proponemos determinar el vector posición $\vec{r}(t)$ en función del tiempo, es decir, lo que hemoa llamado *ley horaria*.

Sea

$$\vec{a}(t)=a_x(t)\vec{i}+a_y(t)\vec{j}+a_z(t)\vec{k}$$

Las componentes de la velocidad $\vec{v}(t)$ deben ser tales que sus derivadas coincidan con las componentes respectivas de la aceleración. Es decir

$$\vec{v}(t)=v_x(t)\vec{i}+v_y(t)\vec{j}+v_z(t)\vec{k}$$

con

$$\frac{dv_x}{dt}=a_x\,,\ \frac{dv_y}{dt}=a_y\,,\ \frac{dv_z}{dt}=a_z$$

y por lo tanto

$$v_x(t)=\mathrm{A}_x(t)+C_x\,,\ v_y(t)=\mathrm{A}_y(t)+C_y\,,\ v_z(t)=\mathrm{A}_z(t)+C_z$$

donde $\mathrm{A}_x, \mathrm{A}_y, \mathrm{A}_z$ son respectivamente primitivas de a_x, a_y, a_z; y C_x, C_y, C_z, son tres constantes. En notación vectorial podemos escribir

$$\vec{v}(t)=\vec{\mathrm{A}}(\mathrm{t})+\vec{C}$$

con:

$$\vec{\mathrm{A}}(t)=\int\vec{a}(t)\,dt=\left(\int A_x(t)\,dt\right)\vec{i}+\left(\int A_y(t)dt\right)\vec{j}+\left(\int A_z(t)\,dt\right)\vec{k}$$

Si se conoce el valor de la velocidad en algún instante de tiempo t_0 . se puede determinar el vector constante $\vec{C}$:

$$\vec{v}(t_0)=\vec{v}_0=\vec{\mathrm{A}}(\mathrm{t}_0)+\vec{C}$$

por lo tanto:

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{\mathrm{A}}(\mathrm{t})-\vec{\mathrm{A}}(\mathrm{t}_0)=\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{a}(t)\,dt$$

Por consiguiente, dada la aceleración en función del tiempo y la velocidad *inicial* $\vec{v}(t_0)=\vec{v}_0$, hemos podido determinar la velocidad en función del tiempo; es decir, la velocidad para cualquier instante *t*.

Un razonamiento análogo nos permite determinar la posición $\vec{r}(t)$, una vez conocida la velocidad $\vec{v}(t)$, y la posición inicial $\vec{r}_0=\vec{r}(t_0)$

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{\mathrm{V}}(t)-\vec{\mathrm{V}}(t_0)=\vec{r}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{v}(t)\,dt$$

donde $\vec{\mathrm{V}}(t)=\int\vec{v}(t)\,dt$ es una primitiva de la velocidad.

Ejemplo: (caso con aceleración constante)

Sea

$$\vec{a}=a\vec{k}$$

con *a* constante, y donde hemos elegido los ejes de modo que el vector aceleración solo tenga componente según Oz. Se desea determinar la posición sabiendo que en t = 0,

$$\vec{v}_0=v_{ox}\vec{i}+v_{oz}\vec{k}\text{, y }\vec{r}_0=z_0\vec{k}+x_0\vec{i}\ .$$

Una primitiva de la aceleración es

$$\vec{\mathrm{A}}(\mathrm{t})=at\vec{k}$$

y por lo tanto

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+at\vec{k}\ =v_{ox}\vec{i}+(v_{oz}+at)\vec{k}$$

A su vez, una primitiva de la velocidad es

$$\vec{\mathrm{V}}(t)=\vec{v}_0 t+\frac{at^2}{2}\vec{k}$$

y por consiguiente

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{at^2}{2}\vec{k}$$

$$\vec{r}(t)=(x_0+v_{ox}t)\vec{i}+\left(z_0+v_{oz}t+\frac{at^2}{2}\right)\vec{k}$$

Observamos que la partícula en su movimiento permanece en el plano Oxz.

I-3c. Movimiento de un proyectil

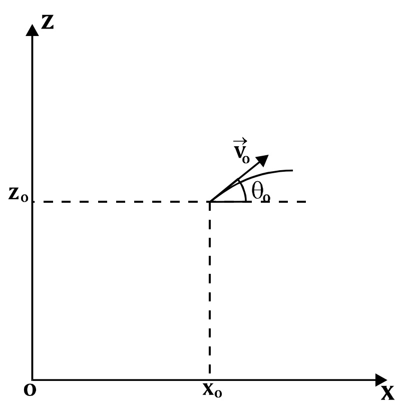


FIG. 14

Un ejemplo de movimiento con aceleración constante es el de un proyectil lanzado cerca de la superficie de la Tierra cuando puede despreciarse el rozamiento del aire. En ese caso, el proyectil posee una aceleración constante dirigida verticalmente hacia abajo. Si escogemos el eje Oz vertical y con su sentido positivo hacia arriba, el eje Ox horizontal en el sentido de la componente horizontal de la velocidad cumplirá:

$$\vec{a}=-g\vec{k}$$

$$\vec{v}=v_0\cos\theta_0\,\vec{i}+(v_0\,\mathrm{sen}\,\theta_0-gt)\vec{k}$$

$$\vec{r}=(x_0+v_0\cos\theta_0 t)\vec{i}+\left(z_0+v_0\,\mathrm{sen}\,\theta_0 t-\frac{1}{2}gt^2\right)\vec{k}$$

La trayectoria del proyectil es una parábola con concavidad negativa. Para probarlo, calculemos z en función de x.

$$t = \frac{x - x_0}{v_{ox}}$$

$$z = z_0 + \frac{v_{oz}}{v_{ox}}(x - x_0) - \frac{g}{2v_{ox}^2}(x - x_0)^2$$

Supongamos que el proyectil se lanza desde un punto de la superficie terrestre que hacemos coincidir con el origen de coordenadas. En ese caso la trayectoria del proyectil estará dada por:

$$z = \frac{v_{oz}}{v_{ox}} x - \frac{g}{2v_{ox}^2} x^2 .$$

El alcance D del proyectil estará dado por la intersección de la trayectoria con la superficie terrestre. En otras palabras, será el valor de x para el cual z vuelve a anularse.

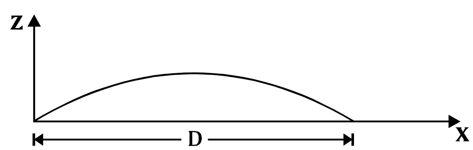


FIG. 14

$$D = \frac{2v_{ox} v_{0z}}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{g}$$

Como el máximo valor de $\operatorname{sen} 2\theta_0$ es 1 para $2\theta_0 = 90^\circ$ o sea $\theta_0 = 45^\circ$, el alcance máximo se obtiene para dicho ángulo y vale $\frac{v_0^2}{g}$.

Conviene recordar que para obtener este resultado, hemos despreciado una serie de fenómenos que intervienen en el movimiento real de proyectiles:

1) No hemos tomado en cuenta la resistencia del aire, que ejerce una fuerza opuesta al movimiento, dependiente de la velocidad y de la densidad del aire.

2) Hemos ignorado las variaciones de la gravedad con la altura, debidas a la dependencia de la fuerza de gravitación del cuadrado de la distancia al centro de la Tierra.

3) Hemos ignorado el movimiento de la Tierra que hace que la trayectoria se desvíe levemente del plano Oxz, debido a las fuerzas de Coriolis que analizaremos más adelante.

Esta situación es típica de toda descripción física de un fenómeno: uno modela el fenómeno teniendo en cuenta únicamente los elementos que parecen ser más relevantes y si desea ganar en precisión se incluyen nuevos factores en el modelo. El orden en que debemos incluir cada uno de los efectos dependerá de la importancia relativa que cada uno tenga, y la introducción sucesiva de los mismos nos irá dando resultados más precisión. Hasta donde conviene complicar el modelo dependerá de con cuanto error queramos estimar el resultado.

Ejercicio:

Discuta, *a priori*[3], la importancia relativa de los factores antes mencionados, y en qué orden deberían ser introducidos en un modelo según estemos describiendo el movimiento de los siguientes proyectiles, y en qué casos no tendría sentido introducir alguno de los efectos:

1) Un proyectil o cohete lanzado en dirección vertical intentando quedar en órbita.

2) Una pelota de papel que es lanzada desde la ventana de un edificio.

3) Un misil intercontinental que es lanzado en forma rasante a la superficie terrestre.

4) Una piedra lunar que un astronauta lanza a otro mientras exploran la superficie de la Luna

I-3d. Sistemas de coordenadas

Aunque el método más simple para localizar una partícula en el espacio es darse las componentes cartesianas del vector posición, existen muchos problemas en que resulta conveniente trabajar con sistemas de coordenadas no cartesianas. Estudiaremos algunos de los sistemas de coordenadas más usados, evaluando en cada caso las variables cinemáticas, posición, velocidad y aceleración.

I-3d.i) Coordenadas polares planas.

[3] - Es decir, sin intentar modelar matemáticamente los mismos. La resolución en forma exacta de uno u otro problema sería un interesante ejercicio para plantearse en el próximo capítulo.

Consideremos una partícula obligada a moverse en un plano. Sea Oxy dicho plano, las componentes cartesianas de la posición, velocidad y aceleración se obtienen imponiendo la condición z = 0.

Por ejemplo:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

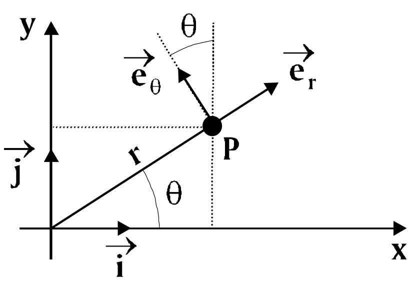


FIG. 15

Las coordenadas polares r, θ están relacionadas con x, y por las siguientes ecuaciones

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\theta$$

ó

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = Ar\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$$

Al vector unitario en la dirección definida al incrementar r dejando θ fijo, le llamaremos $\vec{e}_r$ y al vector unitario de la dirección definida al incrementar θ dejando r fijo, le llamaremos $\vec{e}_\theta$. Dichos vectores se pueden expresar en la base cartesiana por:

$$\vec{e}_r = \cos\theta\vec{i} + \mathrm{sen}\theta\vec{j}$$

$$\vec{e}_\theta = -sen\theta\vec{i} + cos\theta\vec{j}$$

Obsérvese que la dirección de estos vectores cambia con θ, en particular

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = -sen\theta\vec{i} + cos\theta\vec{j} = \vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\vec{i} - \mathrm{sen}\theta\vec{j} = -\vec{e}_r$$

En coordenadas polares, el vector posición del punto P está dado por

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

Para describir el movimiento de una partícula en coordenadas polares habrá que dar $r(t)$ y $\theta(t)$ lo que permite determinar

$$\vec{r}(t)=r(t)\vec{e}_r(\theta(t))$$

El vector velocidad resulta ser

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta .$$

Por consiguiente la velocidad tendrá en general, componentes según $\vec{e}_r$ y $\vec{e}_\theta$ dadas por $v_r=\dot{r}, v_\theta=r\dot{\theta}$

El vector aceleración es

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\ddot{r}\vec{e}_r+\dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}+\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta+r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta+r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$
$$=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

y por lo tanto sus componentes según $\vec{e}_r$ y $\vec{e}_\theta$ son

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$$

Ejemplo:

Sin duda la aplicación más simple de estas coordenadas es al estudio del movimiento circular.

En ese caso $r(t)=R$ y por consiguiente $\vec{v}=R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. La velocidad está dirigida según la tangente a la circunferencia. Por otra parte:

$$\vec{a}=-R\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r+R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

El término $R\dot{\theta}^2$ se denomina aceleración centrípeta y $R\ddot{\theta}$ la aceleración tangencial.

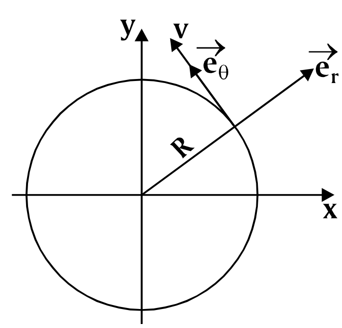


FIG. 16

La cantidad $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ se denomina la velocidad angular, se mide en radianes por segundo (rad/s) o simplemente, s^{-1} .

Cuando la velocidad angular es *constante* $\omega = \omega_0$, se dice que el movimiento es circular *uniforme*:

$$r(t) = R \quad , \quad \dot{\theta} = \omega_0$$

La velocidad $\vec{v} = R\omega\vec{e}_\theta$ tiene módulo constante y la aceleración $\vec{a} = -R\omega_0^2\vec{e}_\theta$ sólo tiene componente centrípeta ya que $\dot{\omega} = \ddot{\theta} = 0$.

La aceleración centrípeta se debe al cambio de dirección del vector velocidad en el tiempo.

El movimiento circular uniforme es un ejemplo de movimiento periódico, la partícula pasa por cada punto de la circunferencia a intervalos iguales de tiempo.

En efecto $\dot{\theta} = \omega$ o sea $\theta = \omega t + C$.

Si en $t = 0$, $\theta = \theta_0$, resulta que $C = \theta_0$ y $\theta(t) = \omega t + \theta_0$.

El período T es el tiempo requerido para dar una vuelta completa, es decir

$$\theta(t+T) = \theta(t) + 2\pi \quad \text{, o sea}$$

$$\omega.(t+T) = \omega t + 2\pi$$

y

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La frecuencia ν es el número de vueltas que da la partícula en una cantidad de tiempo $\nu = \dfrac{1}{T}$.

Cuando el período se expresa en segundos, la frecuencia debe expresarse en s^{-1} , también llamados Hertz (Hz).

La velocidad angular, el período y la frecuencia están relacionados por $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$.

I-3d.ii) Coordenadas cilíndricas.

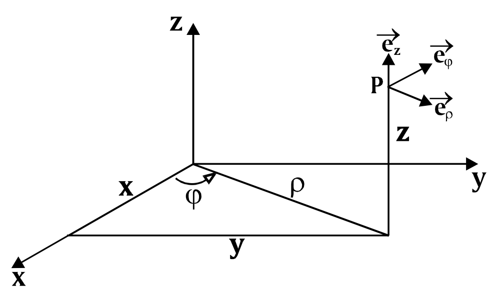


FIG. 17

Las coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) están definidas por las ecuaciones:

$$x = \rho\cos\varphi,$$

$$y = \rho\,\mathrm{sen}\varphi,$$

$$z = z\ ,$$

o a la inversa

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$$
$$z = z,$$

Como en el caso de las coordenadas polares planas definimos $\vec{e}_\rho$ incrementando ρ y dejando z y φ fijos; $\vec{e}_\varphi$ incrementando φ y dejando ρ y z fijos; $\vec{e}_z$ incrementando z y dejando ρ y φ fijos. Los vectores $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$ forman una base ortonormal directa. Sus componentes cartesianas son:

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{i} + \mathrm{sen}\varphi\,\vec{j}$$
$$\vec{e}_\varphi = -\mathrm{sen}\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$
$$\vec{e}_z = \vec{k}$$

El vector posición de un punto P en coordenadas cilíndricas se expresa

$$\vec{r} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z$$

El movimiento queda determinado al darse $\rho(t), \varphi(t)$ y $z(t)$.
En particular la velocidad

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}\dot{\varphi} + \dot{z}\vec{e}_z$$
$$= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$$

y la aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}\dot{\varphi} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}^2\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} + \ddot{z}\vec{e}_z$$
$$= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$$

Cuando el movimiento está restringido al plano z = 0 la presente descripción coincide exactamente con la obtenida en coordenadas polares planas.

Por otra parte, si la partícula se mueve sobre la superficie de un cilindro de radio R.

$$\rho(t) = R$$
$$\vec{v} = R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{e}_z$$
$$\vec{a} = -R\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\rho + R\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\,\vec{e}_z$$

I-3d.iii) Coordenadas polares esféricas

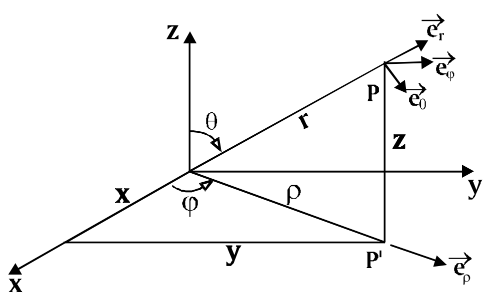


FIG. 18

Las coordenadas polares esféricas (r, θ, φ) están definidas por las siguientes ecuaciones

$$x = r\,\mathrm{sen}\theta\cos\varphi$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

Las coordenadas x e y se obtienen observando que la proyección de OP sobre el plano Oxy es $OP' = r\,\mathrm{sen}\theta$.

Los vectores unitarios $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ están definidos, como en los casos anteriores, incrementando respectivamente r, θ y φ. Esa tríada así ordenada forma una base ortonormal directa[4]. Sus expresiones en coordenadas cartesianas serán:

$$\vec{e}_r = \mathrm{sen}\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$$
$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\,\mathrm{sen}\varphi\,\vec{j} - \mathrm{sen}\theta\,\vec{k}$$
$$\vec{e}_\varphi = -\mathrm{sen}\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$

Se pueden obtener estas expresiones proyectando los vectores $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ y $\vec{e}_\varphi$ sobre los ejes cartesianos a partir de la figura 18; haciendo uso del vector auxiliar $\vec{e}_\rho$ de coordenadas esféricas, observando que:

$$\vec{e}_r = sen\theta\,\vec{e}_\rho + cos\theta\,\vec{k}$$
$$\vec{e}_\theta = cos\theta\,\vec{e}_\rho - sen\theta\,\vec{k}$$

y usando las expresiones de coordenadas cilíndricas.

Sin embargo existe un método sistemático para obtener esta descomposición en cualquier sistema de coordenadas. Se comienza expresando el vector posición en la base cartesiana.

$$\vec{r} = r\,\mathrm{sen}\theta\cos\varphi\,\vec{i} + r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi\,\vec{j} + r\cos\theta\,\vec{k}.$$

Los vectores unitarios se obtienen derivando $\vec{r}$ respecto a la coordenada que es incrementada y luego normalizando el resultado. Es decir

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \mathrm{sen}\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}.$$

Como $\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right| = 1$, entonces

[4] - Es importante acotar que para que esto sea así, el ángulo θ debe estar orientado como en la Figura, de manera que barremos todo el espacio cuando θ va de 0 a π, asumiendo que φ va de 0 a 2π. Es usual definir θ de forma que se mida a partir del plano Oxy, y en sentido contrario al de la Figura. En este θ varía de $-\pi/2$ $\pi/2$ y $\vec{e}_\theta$ queda orientado en sentido contrario, por lo que la terna $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ es ortonormal *indirecta*, y debemos intercambiar $\vec{e}_\theta$ con $\vec{e}_\varphi$ para que se torne *directa*.

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \Big/ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}\,.$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,\vec{j} - r\operatorname{sen}\theta\,\vec{k}$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = r \text{ , entonces}$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,\vec{j} - \operatorname{sen}\theta\,\vec{k}$$

Finalmente

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\vec{i} + r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\vec{j}$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r\operatorname{sen}\theta \quad \text{, entonces}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\operatorname{sen}\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$

Para calcular la velocidad y la aceleración de una partícula es necesario tomar en cuenta que los vectores unitarios varían con el tiempo y por consiguiente nos resultará útil evaluar.

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \qquad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r \qquad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \cos\theta$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_r \operatorname{sen}\theta - \vec{e}_\theta \cos\theta$$

Tomando en cuenta que el vector posición se expresa

$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r(\theta,\varphi)$$

y que r , θ , φ son funciones del tiempo, resulta que

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial\theta}\dot{\theta} + r\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial\varphi}\dot{\varphi} \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial\theta}\dot{\theta} + \dot{r}\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial\varphi}\dot{\varphi} \\ &+ \left(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial\theta}\dot{\theta} + r\dot{\theta}\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial\varphi}\dot{\varphi} \\ &+ \left(\dot{r}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta + r\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\theta + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial\theta}\dot{\theta} \\ &+ r\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}\dot{\varphi}\end{aligned}$$

Sustituyendo las derivadas de los vectores unitarios obtenemos

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta\right)\vec{e}_r + \\ &+ \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)\vec{e}_\theta + \\ &+ \left(r\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi .\end{aligned}$$

Cuando el movimiento está restringido al plano Oxy se cumple

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$$

y se recuperan una vez más las expresiones de la velocidad y la aceleración en coordenadas polares planas.

I-3d.iv: Coordenadas Curvilíneas o Intrínsecas

Otro sistema de coordenadas que nos será de gran utilidad durante el curso, será el sistema de coordenadas intrínsecas. El mismo describe el movimiento de una partícula a través de una única coordenada, llamada *abscisa curvilínea* y que la notaremos con la letra *s*; y una base ortonormal directa denominada el triedro de *Frenet*, formada por los versores *tangencial* $\vec{t}$, *normal* $\vec{n}$ y *binormal* $\vec{b}$. Esta descripción es altamente conveniente cuando, por alguna razón, se conoce *a priori*, la trayectoria específica que sigue la partícula en estudio.

Efectivamente, en muchos problemas a estudiar, la partícula estará obligada a moverse sobre una curva predeterminada, sea porque se trata de una argolla andando por un alambre con una forma dada, un carro en una montaña rusa, o un producto manufacturado moviéndose sobre una cinta transportadora. En uno u otro caso existe cierta imposición al movimiento del cuerpo en estudio que es lo que llamaremos *vínculos*.

A continuación pasaremos a definir cada uno de los elementos antes mencionados y decir cómo quedan escritas las cantidades cinemática velocidad y aceleración, en estas coordenadas.

Abscisa Curvilínea.

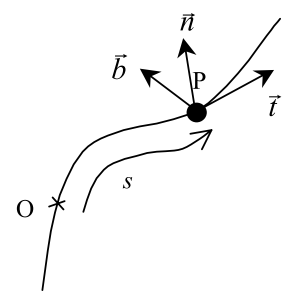


FIG. 19

Como dijimos anteriormente, la *ley horaria* $\vec{r} = \vec{r}(t)$, que en coordenadas cartesianas es equivalente a dar tres ecuaciones escalares $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, nos da la *trayectoria* de la partícula. Efectivamente, estas ecuaciones dan la posición de una partícula en función del tiempo y a medida que varía el tiempo irán describiendo una curva en el espacio. En forma genérica, no es necesario que *t* sea el tiempo, sino que la curva puede ser descrita en función de un parámetro arbitrario ξ; es decir, en coordenadas cartesianas una curva viene determinada dando tres funciones escalar $x = x(\xi), y = y(\xi), z = z(\xi)$. Un parámetro usual conveniente es la longitud de la curva medida a partir de algún origen O. Esta es la coordenada intrínseca *s*. La misma está definida considerando un incremento diferencial en el parámetro ξ que describa la curva, de forma que:

$$d\vec{r} = (dx)\vec{i} + (dy)\vec{j} + (dz)\vec{k} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi}\vec{k}\right)d\xi$$

La distancia recorrida por el punto (diferencial de longitud de arco) es:

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{(d\vec{r})^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}\, d\xi$$ [5]

[5] - Hay un pequeño detalle de que *s* puede crecer en el mismo sentido de ξ o en sentido inverso. En el caso que orientemos *s* en sentido deberíamos agregar un signo de menos (–) antes de la raíz.

por lo que la distancia total, o longitud de arco, recorrida desde el punto O (siendo que este corresponde a la posición en la curva en que el parámetro $\xi = \xi_0$) es:

$$s(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}$$

En el caso particular que tengamos las leyes horarias $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, entonces tendremos que, si la partícula pasa por el punto O en el instante t_0.

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} dt \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \int_{t_0}^{t} dt\ v(t)$$

donde $v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ es el módulo de la velocidad de la partícula.

De esta manera podemos ubicar la partícula en su movimiento sobre la curva, ya que ella se encontrará a una distancia *s*(*t*) del punto O.

Observemos que con la definición anterior *s*(*t*), siempre *crece* con el tiempo; o sea, así *s*(*t*) es la distancia recorrida por la partícula sobre la curva. Sin embargo, en algunas aplicaciones, puede ser interesante considerar a la coordenada curvilínea *s* como una distancia con signo, medida sobre la curva que recorre la partícula, desde un punto O de la curva. El signo tendría relevancia para decirnos si la partícula se encuentra a un lado u otro de O. Para tener en cuenta esto, en la definición anterior de *s* en función del tiempo, alcanzaría que estemos atentos a cuándo la velocidad cambia de signo[6]; y cuando lo haga, cambiemos el signo de la raíz, ya que el movimiento sería en sentido contrario. Es decir, consideraríamos el módulo de la velocidad $v(t)$ con signo: $v(t) = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ según la partícula se mueva en un sentido u otro sobre la

[6] - Para tener en cuenta esto debemos estudiar los cruces por cero de la velocidad, ya que nosotros consideraremos solo funciones continuas de velocidad y posición. No consideraremos casos en que la velocidad o la posición presenten discontinuidades. Cuando la velocidad cambia bruscamente y tiene una discontinuidad se dice que el movimiento es impulsivo, y no lo estudiaremos en este curso. Si la posición cambiase bruscamente de valor y presentase una discontinuidad, estaríamos en presencia de velocidad infinitas, que no son aceptables físicamente. Recordemos que para velocidades cercanas a la velocidad de la luz la Mecánica Newtoniana deja de ser conveniente para el estudio de los fenómenos involucrados en el problema.

curva. [7] La conveniencia de una u otra definición vendrá dada por el problema particular en estudio.

Vector Tangente y Velocidad.

Ya dijimos en la sección I-3b, que a medida que el incremento de tiempo entre dos instantes se torna infinitesimal, el desplazamiento correspondiente tiende a ser tangente a la curva, como muestra la Figura 11. Así que podemos definir el siguiente vector que es tangente a la curva:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$$

Es fácil ver que, por la definición de coordenada curvilínea *s*, este vector tangente es un versor o vector unitario, ya que:

$$\vec{t}^{\,2} = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)^2 = \frac{(d\vec{r})^2}{(ds)^2} = \frac{(ds)^2}{(ds)^2} = 1$$

Es inmediata la demostración de que la velocidad siempre está dirigida según la tangente:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\vec{t}}$$

Observar que esto es coherente con que $\dot{s} = \dfrac{ds}{dt} = v(t)$ sea el módulo con signo de la velocidad. El signo dependerá de cómo orientemos el versor tangente $\vec{t}$.

Normal, Binormal y Aceleración.

Ahora observemos que este versor tangente, si bien siempre mantiene su módulo constante e igual a uno, cambia de dirección con el tiempo, a medida que la partícula va

[7] - Esta discusión surge debido a que, para una descripción conveniente para una curva en el espacio en la forma $x = x(\xi), y = y(\xi), z = z(\xi)$, el parámetro ξ debe determinar unívocamente un punto sobre la curva. Mientras que en la descripción a través del tiempo *t*, la partícula puede pasar por el mismo punto para diferentes instantes.

recorriendo la curva (salvo que esta sea una recta, caso particular que no nos interesa estudiar por este método). Por lo tanto podemos intentar derivar respecto al tiempo la siguiente igualdad:

$$\vec{t}^{\,2} = \vec{t} \cdot \vec{t} = 1$$

o sea:

$$\left(\vec{t}^{\,2}\right)^{\bullet} = \dot{\vec{t}} \cdot \vec{t} + \vec{t} \cdot \dot{\vec{t}} = 2\dot{\vec{t}} \cdot \vec{t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\vec{t}} \cdot \vec{t} = 0$$

Esta es una propiedad general de los versores que varían en el tiempo, su derivada respecto al tiempo es perpendicular al propio vector. En este caso en particular se cumplirá también que:

$$\dot{\vec{t}} = \frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d\vec{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\vec{t}}{ds}$$

por lo que como $\dot{\vec{t}}$ es paralelo a $\frac{d\vec{t}}{ds}$, y este vector es también perpendicular al vector tangente. Definiremos un *versor* que tenga la dirección de este último, y, como es perpendicular a la tangente le llamaremos *versor normal*:

$$\vec{n} = \rho\frac{d\vec{t}}{ds}$$

siendo $\rho = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|^{-1}$ para que $\vec{n}$ sea versor. A ρ se le llama *radio de curvatura* de la trayectoria, y la dirección de $\vec{n}$ la elegiremos de forma que ρ sea siempre positivo. Esto hará que por convención, $\vec{n}$ esté dirigido hacia el *interior* de la curva, o sea, en la dirección en que ella se dobla. El radio de curvatura será mayor cuanto más chico el módulo de la derivada $\frac{d\vec{t}}{ds}$, es decir cuanto menor el cambio en la tangente respecto a la longitud de la curva, o sea, más *abierta* sea la curva. En el caso extremo de que $\frac{d\vec{t}}{ds} = 0$, el radio de curvatura ρ tenderá a infinito y la normal no estará definida. Salvo en algún punto singular de poco interés para nosotros, esto solo ocurre en el caso de una recta, en la que obviamente todas las direcciones perpendiculares a la tangente pueden definirse como versores normales sin perder generalidad.

Finalmente, para determinar completamente el triedro de Frenet, definiremos otro versor, también normal a la curva pero al que llamaremos *binormal*, porque a partir de su definición, será perpendicular tanto a la tangente como a la dirección hacia la que se dobla la curva:

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$$

Y con este versor binormal, $\vec{b}$, la tríada $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ será una base ortonormal directa.

Finalmente, veremos como queda la aceleración de una partícula en este sistema de coordenadas:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \left(\dot{s}\vec{t}\right)^{\bullet} = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}\dot{\vec{t}} = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}\frac{d\vec{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}^2\frac{\vec{n}}{\rho}$$

o sea:

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{s}\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}}$$

Como vimos antes, la expresión de velocidad de una partícula escrita en coordenadas intrínsecas, nos dice que la misma es tangente a la curva. Ahora vemos que su aceleración tiene una componente tangencial, que depende de la rapidez con que aumenta el módulo de la velocidad $\ddot{s} = \left(\dot{s}\right)^{\bullet}$, y otra componente según la normal, que es proporcional al módulo de la velocidad al cuadrado y al inverso del radio de curvatura ρ. La aceleración no tiene componente según la binormal.

Ejercicio:

Demostrar que en una curva plana cualquiera $x = x(\xi),\ y = y(\xi),\ z = 0$ contenida en el plano Oxy, la tangente y la normal están contenidas en dicho plano mientras que la binormal es perpendicular al mismo $\left(\vec{b} = \pm\vec{k}\right)$.

Ejemplo:

Consideremos nuevamente el ejemplo del movimiento circular estudiado anteriormente. Como vimos, para el mismo se cumple que:

$$\vec{r}(t) = \mathrm{R}\vec{\mathrm{e}}_r$$

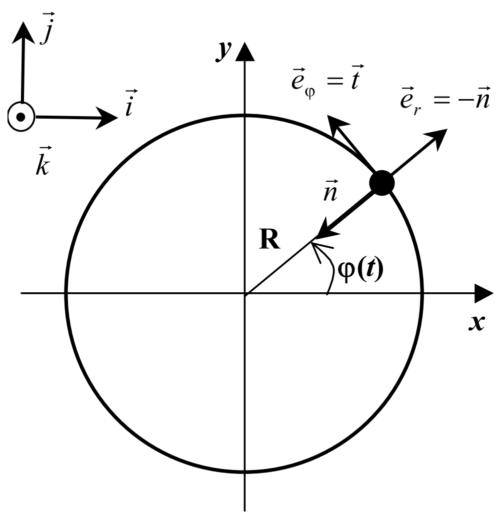


FIG. 20

o sea, en coordenadas cilíndricas:

$$\left\{\begin{matrix} r(t) = R \\ \varphi(t) = \varphi(t) \\ z(t) = 0 \end{matrix}\right\}$$

, que en cartesianas es:

$$\left\{\begin{matrix} x(t) = R\, cos(\varphi(t)) \\ y(t) = R\, sen(\varphi(t)) \\ z(t) = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Donde la velocidad es:

$$\vec{v} = -R\dot{\varphi}\mathrm{sen}(\varphi(t))\vec{i} + R\dot{\varphi}\cos(\varphi(t))\vec{j}$$

lo que vimos es:

$$\vec{v} = R\dot{\varphi}\ \vec{e}_\varphi$$

Queremos el triedro de Frenet y la coordenada curvilínea s en función de φ(t). Tendremos que, asumiendo que $\varphi(t_0)=0$, y medimos s desde el punto $R\vec{i}$, debemos hacer:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} dt\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

donde $\dot{x}$ e $\dot{y}$ son las coordenadas cartesianas de la velocidad, que nos dan:

$$s(t)=\int_{t_0}^{t} dt\ R\ \sqrt{(\dot{\varphi}\cos(\varphi(t)))^2+(\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}(\varphi(t)))^2}$$

Si le damos a $\dot{s}$, que es el integrando de la ecuación anterior, el mismo signo que a $\dot{\varphi}$, de manera que s y φ crezcan en el mismo sentido:

$$s(t)=\int_{t_0}^{t} dt\ \dot{\varphi}R\ \sqrt{(\cos(\varphi(t)))^2+(\mathrm{sen}(\varphi(t)))^2}\ = R\int_{t_0}^{t} dt\ \dot{\varphi} = R\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi} d\varphi = R\varphi$$

resultado que ya es bien conocido de geometría que es que la longitud de arco de la circunferencia es el ángulo del mismo por el radio.

Luego, como ya sabemos:

$$\vec{v}=R\dot{\varphi}\ \vec{e}_{\varphi}\ =\dot{s}\vec{t}$$

por lo que también deducimos que $\vec{t}\ =\vec{e}_{\varphi}$.

Usando lo que ya sabemos de las coordenadas cilíndricas el *versor* normal vendrá determinada por:

$$\vec{n}=\rho\frac{d\vec{t}}{ds}=\rho\frac{d\vec{t}}{dt}\frac{dt}{ds}=\rho\dot{\vec{t}}\frac{1}{\dot{s}}=\frac{\rho}{\dot{s}}\dot{\vec{e}}_{\varphi}\ =-\frac{\rho}{\dot{s}}\dot{\varphi}\vec{e}_r\ =-\frac{\rho}{R\dot{\varphi}}\dot{\varphi}\vec{e}_r\ =-\frac{\rho}{R}\vec{e}_r$$

de donde deducimos que:

$$\vec{n}=-\vec{e}_r \qquad\qquad \rho=R.$$

Observar que el versor normal es según $-\vec{e}_r$ y no según $\vec{e}_r$ porque debe ser *entrante* y no *saliente*, por aquello de que se dirige hacia donde la curva se *cierra*, para que el radio de curvatura así definido sea positivo.

Finalmente para tener el triedro de Frenet completo debemos hallar la *binormal*, que viene definida por:

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \vec{e}_\varphi \times (-\vec{e}_r) = \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{k}$$

por lo que el triedro de Frenet es la base $\vec{e}_\varphi, -\vec{e}_r, \vec{k}$, y la aceleración se escribe como:

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n} = R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{(R\dot{\varphi})^2}{R}(-\vec{e}_r) = R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2\vec{e}_r$$

o sea, el mismo resultado que teníamos para coordenadas polares.

I-4. Movimiento Relativo

"Así, supongamos el conjunto de piezas que permanecen sobre los cuadros de un tablero de ajedrez. Decimos que están en el mismo lugar, que no se han movido, aunque quizás el tablero haya sido movido, entretanto, de una habitación a otra."

Jhon Locke
Ensayos sobre el entendimiento humano.

I-4a Introducción.

En el numeral anterior observamos que resulta imposible determinar las posiciones absolutas de los objetos y sólo podemos medir distancias o intervalos entre puntos. Efectivamente, cada vez que nos referimos a la posición de un punto P, la expresamos en una determinado sistema de coordenadas a través de un vector posición: $\vec{r}_P$. Este vector da la posición *relativa* del punto respecto al origen O del sistema de coordenadas, lo que es claro si hacemos uso de la notación de un vector como diferencia entre dos puntos: $\vec{r}_P = P - O = \vec{r}_{PO}$ [8]. El vector al que hacemos referencia nos dará la posición del punto P, si medimos el mismo a partir del origen de coordenadas O.

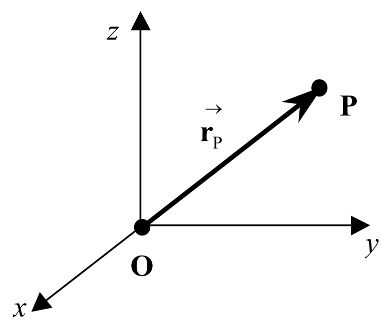


FIG. 21

Como veremos en las secciones siguientes, el movimiento del punto P no sería el mismo, si considerásemos que el punto O está fijo que si está en movimiento respecto a otro punto; o la descripción en coordenadas no sería la misma si la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ está fija que si se está moviendo. Es más, anteriormente ya vimos diferentes sistemas de coordenadas, en algunos casos los versores que formaban la base de los mismos eran fijos, en otros eran móviles. Uno puede pensar entonces

[8] - Ver Sección 0.4.a.ii en Capítulo 0.

que pensar en sistemas de coordenadas moviéndose entre sí surge naturalmente de nuestro estudio anterior de los sistemas de coordenadas. Esto lleva a un concepto más amplio que es el de *Sistema de Referencia*. [9]

Por esta razón el movimiento es un concepto *relativo* y depende siempre del *sistema de referencia* escogido. Como es posible escoger diferentes sistemas de referencia, es importante determinar como están relacionadas las descripciones hechas desde diferentes sistemas. Por ejemplo comparemos observaciones del movimiento de la Luna hechas desde dos sistemas, uno situado en el Sol, al que llamaremos sistema S, y otro situado en la Tierra, al que llamaremos T. El observador terrestre que usa el sistema T observará que la Luna sigue una trayectoria aproximadamente circular alrededor de la Tierra, mientras que vista desde el sistema S, la órbita de la Luna aparecerá como una línea ondulada muy próxima a la trayectoria elíptica de la Tierra. Resulta obvio que ambos movimientos están relacionados y que sería posible pasar de uno al otro si tomáramos en cuenta el movimiento de la Tierra en torno al Sol; o sea, el movimiento de T respecto de S. Como ya indicamos anteriormente la elección del sistema de referencia es cuestión de conveniencia.Se escoge el sistema de modo que la descripción del movimiento resulte más sencilla. El movimiento de la Luna por ejemplo se describirá más fácilmente respecto a la Tierra y el del Sol respecto al centro de la Galaxia.

I-4b Sistemas de referencia con movimiento de traslación relativa .

Consideremos dos sistemas de referencia S = Oxyz y S’ = O'x'y'z' cuyos ejes tienen la misma orientación pero tales que el origen O' del segundo tiene un movimiento dado respecto de O del primero.

Nos interesa comparar las descripciones del movimiento de cierto objeto A vistas desde ambos sistemas. En el ejemplo anterior, A sería la Luna, S un sistema situado en el Sol y S' un sistema situado en la Tierra.

[9] - La naturaleza e importancia de los sistemas de referencia quedará clara en el próximo Capítulo de Dinámica de la Partícula. Por ahora aclaremos que un sistema de referencia es algo más que simplemente dar un sistema de coordenadas, como lo haremos a lo largo de este Capítulo. Por ejemplo, en la Figura 22, si el punto O’ no se moviese respecto a O, entonces el movimiento de cualquier partícula sería el mismo respecto a los sistemas S y S’. Ambos sistemas S y S’ serían equivalentes desde este punto de vista, y pertenecerían al mismo sistema de referencia, aunque aún seguirían siendo diferentes como sistemas de coordenadas. El concepto de sistemas de referencia está asociado también al de movimiento de cuerpo rígido, que estudiaremos en la segunda parte del curso. Si quisiésemos una definición estricta de sistemas de referencia, por ahora podríamos decir que un sistema de referencia es una clase de equivalencia de todos los sistemas de coordenadas que no están en movimiento respecto a los demás sistemas de la clase.

Los vectores posición del punto A vistos desde O y O' están relacionados por

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_{oo'}(t)+\vec{r}'(t)$$

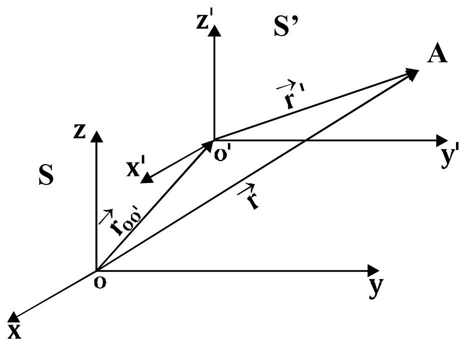


FIG. 22

donde para simplificar la notación le hemos llamado $\vec{r}$ al vector $\vec{r}_{OA} = A - O$ y $\vec{r}\,'$ al vector $\vec{r}_{O'A} = A - O'$, pero mantenemos explícita la notación para el vector $\vec{r}_{OO'} = O - O'$, que es la posición del origen de coordenadas del sistema S' respecto al S.

Supondremos que el tiempo usado en ambos sistemas para describir el movimiento es el mismo. Este es un postulado básico de la Mecánica Newtoniana que implica, en otras palabras, que las mediciones del tiempo no dependen del movimiento del observador y que dos relojes situados en O y O' una vez sincronizados seguirán marcando lo mismo. Como ya hemos observado esto es cierto sólo si las velocidades involucradas en el problema son mucho menores que la de la luz.

La velocidad $\vec{v}$ de A respecto al sistema S se define

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

y la velocidad de A respecto de S' es

$$\vec{v}'=\frac{d\vec{r}'}{dt}=\frac{dx'}{dt}\vec{i}+\frac{dy'}{dt}\vec{j}+\frac{dz'}{dt}\vec{k}.$$

Hacemos notar que para ambos sistemas la base $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ que determina los ejes de los sistemas, es la misma, y como hicimos anteriormente podemos considerarla fija respecto a los mismos.

Finalmente

$$\vec{v}_{oo'}=\frac{d\vec{r}_{oo'}}{dt}=\frac{dx_{oo'}}{dt}\vec{i}+\frac{dy_{oo'}}{dt}\vec{j}+\frac{dz_{oo'}}{dt}\vec{k}$$

es la velocidad del origen del sistema S' respecto de S.

Derivando respecto de t la relación entre los vectores de posición resulta

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_{oo'}(t)+\vec{v}\,'(t).$$

La velocidad de una partícula respecto del sistema S es igual a la velocidad respecto del sistema S' más la velocidad con que el sistema S' se mueve respecto de S; que es precisamente la velocidad de su origen de coordenadas O' respecto del sistema S.

Derivando nuevamente esta expresión obtenemos una relación análoga para las aceleraciones

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{v}_{oo'}}{dt}+\frac{d\vec{v}\,'}{dt}=\vec{a}_{oo'}(t)+\vec{a}\,'(t).$$

Por lo general se le suele llamar al sistema S = Oxyz sistema *fijo*, al S' = O'x'y'z' sistema *móvil*. A la velocidad $\vec{v}$ de la partícula respecto al sistema llamado *fijo* se la denomina *velocidad absoluta*, o simplemente $\vec{v}_A$; a la velocidad $\vec{v}\,'$ respecto al sistema móvil se la llama *velocidad relativa*, o $\vec{v}_R$; y a la velocidad del sistema móvil respecto del fijo $\vec{v}_{oo'}$ se la denomina *velocidad de transporte o de arrastre*, y se la suele notar como $\vec{v}_T$. Los mismos nombres se aplican a las aceleraciones respectivas. Las relaciones anteriores establecen entonces que: la velocidad (aceleración) absoluta es igual a la velocidad (aceleración) relativa más la velocidad (aceleración) de transporte. [10]

Un importante caso particular de la última relación obtenida ocurre cuando el sistema móvil se desplaza con velocidad constante respecto del fijo En este caso

$$\frac{d\vec{v}_{oo'}}{dt}=0$$

y

$$\vec{a}(t)=\vec{a}\,'(t).$$

La aceleración con respecto a sistemas de referencia con movimiento relativo de traslación uniforme es la misma

---

[10] - Observemos que esta nomenclatura es poco adecuada, ya *que toda velocidad o aceleración es relativa a algún sistema* y no conviene por lo tanto hablar de velocidades o aceleraciones absolutas. Igual la utilizaremos por ser muy común. Hay que tener en cuenta que estos son solo nombres, y siempre debe especificarse bien respecto a qué sistemas las mismas están siendo medidas, o sea, cuál es el sistema *absoluto* y cuál el *relativo*.

Ejemplo.

Cuentan los cronistas que Cristóbal Colón descubrió tierra siguiendo el vuelo de ciertas aves marinas que regresaban a tierra al atardecer.

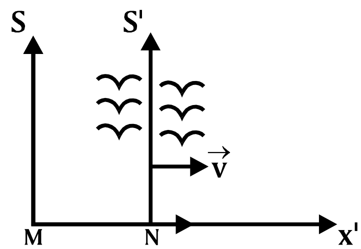


FIG. 23

Si suponemos que la naves se movían hacia el oeste con una velocidad de 15 km/h y que vistas desde las naves las aves se dirigían hacia el sur con una velocidad de 30 km/h. ¿ En qué dirección debió virar para encontrar tierra?.

El problema consiste en determinar la dirección que debe tener la velocidad del barco con relación al sistema M del mar.

Para encontrar tierra esta debe ser colineal con la velocidad de las aves respecto del mar (Sistema M).

La velocidad de las aves respecto de las naves es

$$\vec{v}' = 30\vec{j}\ km/h.$$

La velocidad de la nave es

$$\vec{v}_{NM} = 15\vec{i}\ km/h.$$

y por consiguiente la velocidad de las aves respecto al mar es

$$\vec{v} = 15\vec{i} + 30\vec{j}\ km/h.$$

y por consiguiente la nave debe virar al sur un ángulo

$$\alpha = Ar\,\mathrm{tg}\frac{30}{15} = Ar\,\mathrm{tg}2.$$

Obviamente Colón se las arregló para llegar a tierra sin conocer las reglas del movimiento relativo, y no existía en su época la Mecánica Newtoniana, pero no conviene seguir su ejemplo si se pretende aprobar este curso.

I-4c. Sistemas de referencia con movimiento relativo de rotación.

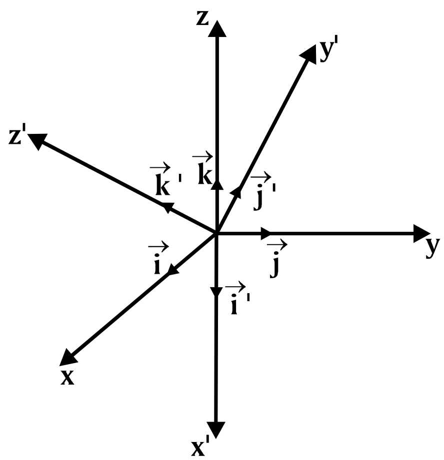


FIG. 24

Consideremos ahora dos sistemas de referencia S = Oxyz y S' = O'x'y'z', con origen de coordenadas común O = O', cuyos ejes rotan uno respecto del otro. En otras palabras, la orientación de los ejes del sistema S' respecto de los de S va cambiando en el tiempo. Si introducimos los vectores ortonormales de las bases asociadas a cada sistema, y les llamamos $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ a los de S, e $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ a los de S', el vector posición $\vec{r}$ se puede expresar como:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

o bien

$$\vec{r}\,' = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,'.$$

En este caso, ya que O y O' coinciden, el vector posición es el mismo, o sea:

$$\vec{r} = \vec{r}\,'$$

sólo cambian sus componentes, porque en uno y otro sistemas de coordenadas lo expresamos en una base diferente. [11]

I-4c.i) Derivada de un Vector Respecto a Sistemas de Referencia en Movimiento.

Obsérvese que expresiones análogas valen para las componentes de un vector cualquiera $\vec{A}$. En efecto según el sistema de referencia elegido

$$\vec{A} = A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j} + A_z\,\vec{k}$$

$$\vec{A} = A_x'\vec{i}\,' + A_y'\vec{j}\,' + A_z'\vec{k}\,'$$

Esta situación es típica de los sistemas en rotación relativa. En el caso anterior de sistemas en traslación, si bien cambiaban los vectores posición de una partícula, las componentes de un vector libre eran las mismas en ambos sistemas.

La derivada de cualquier vector estaba definida por

[11] - Por los detalles del concepto de un vector y su expresión en coordenadas, y de cómo deben de cambiar estas al cambiar de base, referirse a la Sección 0.3.b del Capítulo 0.

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}.$$

Cuando los sistemas de coordenadas rotan uno respecto al otro nos encontramos con una dificultad.

Un vector puede estar fijo respecto a uno de los sistemas y rotar respecto del otro. Es decir que la forma en que cambian sus componentes depende del sistema de coordenadas. Por ejemplo, los sistemas de la base $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ están fijos respecto a S', porque forman parte de dicho sistema, mientras que por la propia definición rotan en torno a S. Por consiguiente, la derivada de un vector respecto del tiempo depende del *sistema de referencia*, es decir, depende de la base de vectores que se considere como *fija*.

Definimos la derivada d/dt respecto al sistema S = Oxyz por

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\dot{A}_x\vec{i}+\dot{A}_y\vec{j}+\dot{A}_z\vec{k}$$

y la derivada d'/dt respecto al sistema S' = O'x'y'z' es

$$\frac{d'\vec{A}}{dt}=\dot{A}_x'\vec{i}\,'+\dot{A}_y'\vec{j}\,'+\dot{A}_z'\vec{k}\,'$$

Ambas derivadas se pueden relacionar recordando que el cambio de las componentes respecto a Oxyz se debe a dos factores. En primer lugar cambian las componentes del vector respecto a O'x'y'z' y en segundo lugar los vectores $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ se mueven respecto al sistema Oxyz. Por lo tanto

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{d\left(A_x'\vec{i}\,'\right)}{dt}+\frac{d\left(A_y'\vec{j}\,'\right)}{dt}+\frac{d\left(A_z'\vec{k}\,'\right)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\dot{A}_x'\vec{i}\,'+\dot{A}_y'\vec{j}\,'+\dot{A}_z'\vec{k}\,'+A_x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+A_y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+A_z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}$$

A continuación veremos que siempre es posible calcular explícitamente las derivadas de la base móvil $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ en términos de un vector que caracteriza la rotación del sistema O'x'y'z' respecto del Oxyz, llamado *velocidad angular*.

Velocidad Angular

Comencemos expresando las derivadas de los vectores $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ en la misma base móvil.

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt}=a_{11}\vec{i}\,'+a_{12}\vec{j}\,'+a_{13}\vec{k}\,'$$

$$\frac{d\vec{j}\,'}{dt}=a_{21}\vec{i}\,'+a_{22}\vec{j}\,'+a_{23}\vec{k}\,'$$

$$\frac{d\vec{k}\,'}{dt}=a_{31}\vec{i}\,'+a_{32}\vec{j}\,'+a_{33}\vec{k}\,'$$

Los vectores móviles $\vec{i}\,'(t),\vec{j}\,'(t),\vec{k}\,'(t)$ satisfacen en todo instante t las relaciones de ortonormalidad siguientes:

$$\vec{i}\,'.\vec{i}\,'=1 \quad \vec{j}\,'.\vec{j}\,'=1 \quad \vec{k}\,'.\vec{k}\,'=1$$

$$\vec{i}\,'.\vec{j}\,'=0 \quad \vec{j}\,'.\vec{k}\,'=0 \quad \vec{k}\,'.\vec{i}\,'=0$$

por lo tanto derivando la primera de estas ecuaciones tenemos que

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt}.\vec{i}\,'+\vec{i}\,'.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}=0$$

es decir $$\frac{d\vec{i}\,'}{dt}.\vec{i}\,'=0$$

de las relaciones análogas para $\vec{j}\,'$ y $\vec{k}\,'$ resulta

$$\frac{d\vec{j}\,'}{dt}.\vec{j}\,'=0 \quad \frac{d\vec{k}\,'}{dt}.\vec{k}\,'=0$$

o sea que $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$.

Por otra parte derivando la ecuación $\vec{i}\,'.\vec{j}\,'=0$ obtenemos:

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt}.\vec{j}\,'=-\vec{i}\,'.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}$$

procediendo análogamente con las otras dos relaciones de ortogonalidad se obtiene que:

$$\frac{d\vec{j}'}{dt}.\vec{k}'=-\vec{j}'.\frac{d\vec{k}'}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{k}'}{dt}.\vec{i}'=-\vec{k}'.\frac{d\vec{i}'}{dt}$$

relaciones que implican $a_{12}=-a_{21}, a_{23}=-a_{32}, a_{31}=-a_{13}$.

Si introducimos ahora el vector velocidad angular $\vec{\omega}$ siendo

$$\vec{\omega}=\omega_x'\vec{i}'+\omega_y'\vec{j}'+\omega_z'\vec{k}'$$

donde $\omega_x'=a_{23}, \omega_y'=a_{31}, \omega_z'=a_{12}$. Se cumple:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt}=\omega_z'\vec{j}'-\omega_y'\vec{k}'=\vec{\omega}\times\vec{i}'$$

$$\frac{d\vec{j}'}{dt}=-\omega_z'\vec{i}'+\omega_x'\vec{k}'=\vec{\omega}\times\vec{j}'$$

$$\frac{d\vec{k}'}{dt}=\omega_y'\vec{i}'-\omega_x'\vec{j}'=\vec{\omega}\times\vec{k}'.$$

Dada la importancia que tiene el concepto de velocidad angular en este curso, no solamente en el estudio de sistemas en movimiento sino en toda la segunda parte del curso, referente a Sistemas Rígidos, se da en el Apéndice de este Capítulo otra deducción levemente diferente y menos directa, pero más elegante de la deducción de estas expresiones; pero que nos dan una fórmula general de la velocidad angular de un sistema en movimiento.

Relación Fundamental entre Derivadas de un Vector.

Volviendo a la forma de la derivada de un vector, podemos escribir:

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{d'\vec{A}}{dt}+A_x'\vec{\omega}\times\vec{i}+A_y'\vec{\omega}\times\vec{j}+A_z'\vec{\omega}\times\vec{k}$$

o sea:

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{d'\vec{A}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{A}}$$

Esta es la relación fundamental entre las derivadas asociadas a distintos sistemas de coordenadas. Obsérvese que si las coordenadas de un vector $\vec{B}$ en el sistema móvil S' = O'x'y'z' no varían, es decir si dicha recta está en reposo en el sistema móvil, se cumple:

$$\frac{d\vec{B}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{B}.$$

La derivada $\frac{d}{dt}$ respecto del sistema Oxyz, también es llamada derivada respecto al sistema *fijo* o derivada *absoluta*, porque deja fijos los vectores del sistema S, al que podemos llamar sistema absoluto, en el abuso de la nomenclatura introducida anteriormente y se la suele notar como d_{A}/dt. La derivada $\frac{d'}{dt}$ es llamada derivada respecto al sistema móvil o derivada *relativa*, notándosela como d_{R}/dt.

La relación fundamental establece que: *la derivada absoluta de un vector es igual a la derivada relativa más la derivada absoluta que tendría dicho vector si se encontrara en reposo en el sistema móvil.*

En el caso particular que el vector que deseamos derivar es la propia velocidad angular se cumple

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\frac{d'\vec{\omega}}{dt}$$

porque el producto vectorial de cualquier vector por sí mismo da cero. Por ser la derivada de la velocidad angular de un sistema respecto al otro, la misma respecto a cualquiera de los dos, podemos usar sin ambigüedades la notación $\dot{\vec{\omega}}$.

Interpretación de la Velocidad Angular.

Analicemos más detalladamente el significado del vector velocidad angular $\vec{\omega}$. Sea $\vec{B}$ un vector fijo en el sistema móvil, es decir que

$$\frac{d\vec{B}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{B}\ .$$

Entonces se cumple para Δt suficientemente pequeño :

$$\Delta\vec{B}(t)=\vec{B}(t+\Delta t)-\vec{B}(t)=\vec{\omega}(t)\times\vec{B}(t)\Delta t.$$

Usando la definición del producto vectorial resulta que $\Delta\vec{B}(t)$ es tangente a una circunferencia de centro C, proyección de $\vec{B}$ sobre $\vec{\omega}$ y radio B sen θ . Su magnitud vale

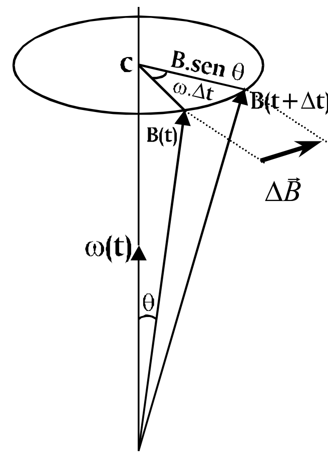


FIG. 25

$$\left|\Delta\vec{B}\right|=(B\mathrm{sen}\theta)(\omega\Delta t)$$

Por ese motivo los vectores en reposo respecto de un sistema móvil se comportan como si en el instante t rotasen alrededor de un eje que pasa por O en la dirección de $\vec{\omega}$. En general la dirección de $\vec{\omega}$ varía a medida que el tiempo transcurre por lo que la dirección del eje también lo hace.

I-4c.ii) Fórmula de Cambio de Velocidad.

Volvamos ahora a la descripción del movimiento de una partícula situada en P vista desde dos sistemas de referencia en rotación relativa. Como los orígenes O y O' coinciden, ya habíamos visto que el vector posición de P es el mismo en ambos sistemas y sólo difieren sus componentes. Estamos ahora en condiciones de relacionar las velocidades respecto de ambos sistemas de coordenadas.

La velocidad respecto del sistema S = Oxyz es:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

mientras que la velocidad vista por un observador situado en el sistema móvil es:

$$\vec{v}'=\frac{d'\vec{r}}{dt}=\frac{dx'}{dt}\vec{i}'+\frac{dy'}{dt}\vec{j}'+\frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

Ambas expresan la variación del mismo vector visto en dos sistemas distintos de coordenadas y están relacionadas por:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d'\vec{r}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{r}$$

o sea $$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}$$

Esta ecuación permite relacionar la velocidad respecto al sistema fijo S = Oxyz, también llamado sistema absoluto ($\vec{v}$ es la velocidad "absoluta", por lo que también se la suele escribir como $\vec{v}_A$), con la velocidad $\vec{v}'$ respecto al sistema móvil S' = O'x'y'z', también llamado sistema relativo ($\vec{v}'$ es la velocidad "relativa" o $\vec{v}_R$).

I-4c.iii) Fórmula de Cambio de Aceleración.

Para calcular la relación entre las aceleraciones observemos que la aceleración respecto al sistema fijo Oxyz o aceleración absoluta está dada por:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}$$

y la aceleración respecto al sistema móvil o aceleración relativa por:

$$\vec{a}'=\frac{d'\vec{v}'}{dt}=\frac{d'^2\vec{r}}{dt^2}=\ddot{x}'\vec{i}'+\ddot{y}'\vec{j}'+\ddot{z}'\vec{k}'$$

y utilizando una vez más la relación fundamental para la derivación de un vector resulta:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\left(\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}\right)}{dt}=\frac{d\vec{v}'}{dt}+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=$$

$$= \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d'\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

Observando que $\vec{a}' = \frac{d'\vec{v}'}{dt}$ y que $\vec{v}' = \frac{d'\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{r}'}{dt}$, porque tenemos los orígenes O y O' coincidentes de forma que $\vec{r} = \vec{r}'$; y agrupando en términos, la ecuación anterior toma la siguiente forma:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}'.$$

Esta relación entre la aceleración "absoluta" $\left(\vec{a} = \vec{a}_A\right)$ y la aceleración "relativa" $\left(\vec{a}' = \vec{a}_R\right)$ es llamada Teorema de Coriolis.[12] Obsérvese que una partícula en reposo en el sistema O'x'y'z', tendría una aceleración

$$\vec{a}_T = \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}$$

llamada *aceleración de arrastre* o *transporte* porque corresponde a la aceleración con que una partícula es transportada al moverse junto con el sistema móvil.

El último sumando es

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}\times\vec{v}'.$$

Este sumando se denomina aceleración de Coriolis y es no nulo sólo si la partícula se mueve respecto al sistema móvil. Además esta velocidad no tiene que ser colineal con la velocidad angular.

Así entonces, para este caso particular de la rotación del sistema móvil en torno al sistema absoluto tenemos que:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C$$

Ejemplo 1:

[12] - La anterior es en realidad una forma simplificada del mismo para cuando se trata de dos sistemas cuyo origen de coordenadas se mantiene coincidente (no hay movimiento de traslación).

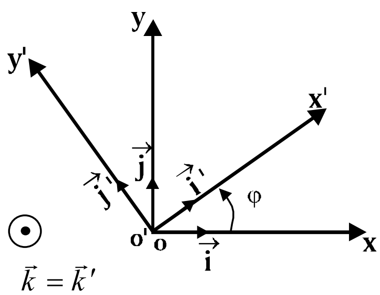


FIG. 26

Se consideran dos sistemas de referencia con movimiento de rotación relativo y origen común Oz coincide con Oz' y una rotación de ángulo φ lleva Ox a O'x' . Determinar la velocidad angular $\vec{\omega}$.

Se cumple:

$$\vec{i}' = \cos\varphi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{j}$$
$$\vec{j}' = -\operatorname{sen}\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$
$$\vec{k} = \vec{k}'$$

$$\dot{\vec{i}}' = -\operatorname{sen}\varphi\dot{\varphi}\,\vec{i} + \cos\varphi\dot{\varphi}\,\vec{j} = \dot{\varphi}\,\vec{j}'$$
$$\dot{\vec{j}}' = -\cos\varphi\dot{\varphi}\,\vec{i} - \operatorname{sen}\varphi\dot{\varphi}\,\vec{j} = -\dot{\varphi}\,\vec{i}'$$

Observar la semejanza que existe entre estas relaciones con las que relacionan las derivadas de los versores de coordenadas cilíndricas.

De estas:

$$\omega_z = a_{12} = \dot{\varphi}$$

$$\omega_x = \omega_y = 0$$

por lo que resulta

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k}}$$

Esta relación es de suma importancia en la interpretación conceptual de qué es la velocidad angular, y de la forma en que calcularemos ella en la práctica.

Observemos, antes que nada que se trata de un *movimiento plano*, así llamado porque, aunque sea en torno del instante considerado, todos los puntos se moverán en un plano perpendicular al eje Oz, que se mantiene fijo. O sea, la normal $\vec{k}$ al plano del movimiento de todos los puntos del sistema O'x'y'z' se mantiene constante. En este tipo de movimiento extremadamente particular, la velocidad angular queda orientada precisamente en la dirección de esa normal; o sea:

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k} \qquad \text{con } \omega = \dot{\varphi}$$

Es inmediato ver que el nombre de "velocidad angular" está relacionado con que esta ecuación nos dice que el módulo (con signo) de ese vector es igual a la derivada del ángulo φ; o sea, la rapidez con que φ crece:

$$\omega = \dot{\varphi} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Haciendo una comparación con el concepto de velocidad como la derivada de la posición, definido anteriormente, surge naturalmente la idea de *velocidad angular*.

Desde un punto de vista práctico, este resultado nos sirve porque cada vez que tengamos un movimiento plano, la velocidad angular podrá escribirse de esta forma. Donde es importante aclarar que φ es aquí simplemente el ángulo entre uno de los ejes del sistema fijo y uno de los ejes del sistema móvil, *medido a partir del primero de ellos hacia el segundo*[13] y de esta manera, dado que $\vec{k}$ es saliente de la hoja, el ángulo φ crece en sentido antihorario, visto desde el extremo de $\vec{k}$.

Ejemplo 2:

Una partícula está situada a una distancia d del origen medida sobre el eje Ox' de la Fig. anterior, y permanece en reposo respecto al sistema móvil. Determinar la velocidad y aceleración vista desde el sistema fijo Oxyz.

Se cumple que $\vec{v}'=0$ y que $\vec{a}'=0$ ya que las coordenadas de la partícula respecto del sistema móvil no varían. Por lo tanto:

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\dot{\varphi}\vec{k}\times d\vec{i}\,'=d\dot{\varphi}\vec{k}\times\vec{i}\,'=d\dot{\varphi}\vec{j}\,'.$$

La magnitud de la velocidad es $d\dot{\varphi}$ y la dirección es perpendicular a la del vector posición. Este resultado era esperable ya que en este caso la partícula se mueve sobre una circunferencia de radio d describiendo un movimiento circular. Recordando las definiciones de los vectores unitarios en coordenadas polares resulta que:

$$\vec{e}_r=\vec{i}\,' \quad \vec{e}_\varphi=\vec{j}\,'$$

y por tanto para un movimiento circular se tiene que

$$\vec{v}=d\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi=d\dot{\varphi}\vec{j}\,'$$

en cuanto a la aceleración:

13 - La dirección en que medimos φ es importante porque si el sistema gira hacia un lado u otro su derivada tendrá diferente signo.

$$\vec{a}=\vec{a}_T=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}=$$
$$=\dot{\varphi}\vec{k}\times\left(\dot{\varphi}\vec{k}\times d\vec{i}\,'\right)+\ddot{\varphi}\vec{k}\times d\vec{i}\,'=$$
$$=\dot{\varphi}\vec{k}\times d\dot{\varphi}\vec{j}\,'+d\ddot{\varphi}\vec{j}\,'=-d\dot{\varphi}^2\vec{i}\,'+d\ddot{\varphi}\vec{j}\,'.$$

que no es otra cosa que la expresión de la aceleración de un punto con movimiento circular.

Ejemplo 3.

Consideremos ahora que una partícula que se mueve con velocidad constante a lo largo del eje O'x' dada por:

$$\vec{v}\,'=-v_0\vec{i}\,'.$$

En t = 0 la partícula se encuentra en la posición $\vec{r}\,'=d\vec{i}\,'$.

Determinar la velocidad y la aceleración de la partícula respecto al sistema fijo.

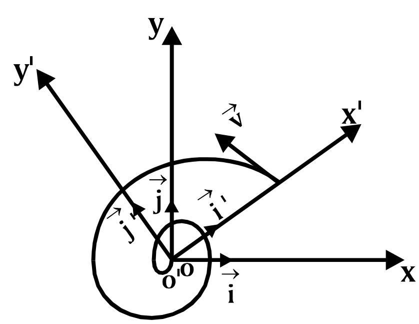


FIG. 27

La posición de la partícula en el sistema que rota es

$$\vec{r}\,'=(d-v_0t)\vec{i}\,'$$

y en el sistema fijo el vector posición estará dado por

$$\vec{r}=(d-v_0t)\left[cos\varphi\vec{i}+sen\varphi\vec{j}\right].$$

Es decir que, vista desde el sistema fijo, la partícula no sólo se acerca al centro sino que va rotando y describe una trayectoria espiral.

La velocidad respecto al sistema fijo estará dada por

$$\vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$=-v_0'\vec{i}'+\dot{\varphi}\vec{k}'\times(d-v_0't)\vec{i}'$$
$$=-v_0'\vec{i}'+(d-v_0't)\dot{\varphi}\vec{j}'.$$

Para calcular la aceleración respecto al sistema fijo recordemos que

$$\vec{a}=\vec{a}'+\vec{a}_T+\vec{a}_C$$

y evaluemos cada uno de los sumandos.

La aceleración relativa es

$$\vec{a}'=-\frac{dv_0'}{dt}\vec{i}'=0.$$

la aceleración de transporte vale

$$\vec{a}_T=\dot{\varphi}\vec{k}\times\left(\dot{\varphi}\vec{k}\times(d-v_0't)\vec{i}'\right)+\ddot{\varphi}\vec{k}\times(d-v_0't)\vec{i}'$$
$$=-(d-v_0't)\dot{\varphi}^2\vec{i}'+(d-v_0't)\ddot{\varphi}\vec{j}'$$

y la de Coriolis

$$\vec{a}_c=2\dot{\varphi}\vec{k}\times\left(-v_0'\vec{i}'\right)=-2v_0'\dot{\varphi}\vec{j}'.$$

La aceleración relativa $\vec{a}'$ es nula ya que la partícula se mueve con velocidad relativa constante. La aceleración de transporte corresponde a la que tendría una partícula que en el instante t se encontrara en reposo, respecto al sistema móvil, a una distancia $d-v_0't$ del origen. En cuanto a la aceleración de Coriolis su significado se puede determinar observando los términos del vector velocidad que han sido derivados para su obtención: por una lado la magnitud de la velocidad tangencial $(d-v_0't)\dot{\varphi}\vec{j}'$ disminuye a medida que nos acercamos al origen y por otro la componente radial de la velocidad $-v_0'\vec{i}'$ cambia de dirección a medida que el eje $\vec{i}'$ rota. También se puede comparar cada uno con su origen en la deducción teórica de la aceleración de Coriolis.

Obsérvese que la velocidad absoluta y la aceleración absoluta podrían haberse obtenido directamente derivando

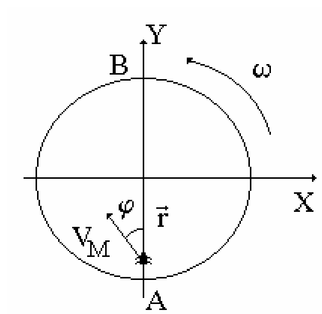
$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

y verifique que el resultado es el mismo que el obtenido usando el Teorema de Coriolis.

Este es un procedimiento común para verificar los resultados del teorema de Coriolis. La conveniencia de usar uno u otro método estará dada por el problema particular en estudio.

Ejemplo 4.



Una hormiga (con conocimientos de física) puede moverse con una velocidad máxima V_M y desea recorrer la distancia AB=2R entre puntos diametralmente opuestos de un disco que rota con velocidad angular ω constante, en línea recta respecto al sistema fijo. Calcular el tiempo mínimo necesario para realizar dicho recorrido. Discutir para que valores de V_M, ω, R no es posible registrar dicha trayectoria.

$$\vec{V} = \vec{V}_R + \vec{V}_T = \vec{V}_R + \omega \times \vec{r}$$

el movimiento debe ser según la dirección y, por lo tanto: $V_{AX} = 0$.

Proyectando según los ejes, y haciendo uso de cual es el movimiento deseado en el sistema absoluto es $X = 0$:

$$0 = -V_M \operatorname{sen}\varphi - \omega Y$$

$$V_{AY} = V_M \cos\varphi = \dot{Y}$$

de la primera se deduce que: $Y = -\dfrac{V_M \operatorname{sen}\varphi}{\omega}$ y derivando:

$$\dot{Y} = \frac{-V_M \cos\varphi\,\dot{\varphi}}{\omega} \Rightarrow \dot{\varphi} = -\omega$$

El hecho de que en este caso la velocidad angular del disco sea igual y opuesta a la derivada del ángulo φ no es coincidencia, sino sale del hecho de que, para la hormiga solidaria al disco, la recta que ella desea seguir, se mueve con velocidad angular opuesta a la que el disco tiene respecto al sistema fijo. Esto lo veremos en general al final de este Capítulo.

Luego:

$$\varphi = \varphi_0 - \omega t$$

Observemos que φ decrece a medida que la hormiga avanza, así que el ángulo máximo es el inicial en que:

$$V_M \operatorname{sen}\varphi_0 = \omega R \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi_0 = \frac{\omega R}{V_M}$$

de aquí se deduce que para que la trayectoria sea posible, se debe cumplir: $\frac{\omega R}{V_M} \leq 1$.

Si esto no fuese así, la velocidad angular del disco sería muy grande y la hormiga no podría ir lo suficientemente rápido como para compensar el movimiento de arrastre del disco y mantenerse sobre la recta deseada.

Para calcular el tiempo que le lleva hacer el viaje:

$$2R = \int_0^T \dot{Y}\, dt = \int_0^T V_M \cos(-\omega t + \varphi_0) dt = -\frac{V_M}{\omega} \operatorname{sen}(\varphi_0 - \omega t)\Big|_0^T$$

$$-\operatorname{sen}(\varphi_0 - \omega T) + \operatorname{sen}\varphi_0 = \frac{2R\omega}{V_M} \quad \therefore \quad \operatorname{sen}(\omega T - \varphi_0) = \operatorname{sen}\varphi_0$$

Esta ecuación tiene múltiples soluciones, ya que podemos decir que:

$$\omega T - \varphi_0 = \varphi_0 + 2\pi n$$

con n entero.

Es decir, la hormiga llega al punto B en menos de una vuelta del disco, o en vueltas sucesivas. Como queremos hallar el mínimo tiempo posible para ello, esto será así cuando $n = 0$:

$$\omega T = 2\varphi_0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2}{\omega} \operatorname{Arsen}\left(\frac{\omega R}{V_M}\right)$$

I-4d. Caso general

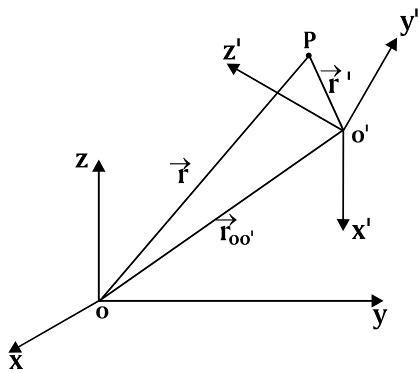


FIG. 28

Nos referiremos ahora al caso general de un sistema S'=O'x'y'z' cuyo origen se mueve y cuyos ejes rotan respecto al sistema fijo S=Oxyz . Los vectores posición de P respecto a los sistemas O y O' están relacionados por

$$\vec{r} = \vec{r}_{oo'} + \vec{r}\,'$$

Observar que ahora, a diferencia del caso anterior, debemos distinguir claramente los vectores $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$ porque el origen de coordenadas de los sistemas S y S' ya no es el mismo:

$$\vec{r} = \vec{r}_{OP} = P - O$$

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_{O'P} = P - O'$$

$$\vec{r}_{OO'} = O' - O$$

como indicados en la Figura 28.

I-4d.i) Teorema de Roverbal.

La velocidad de P respecto al sistema *fijo* S será:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{oo'}}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \frac{d\vec{r}_{oo'}}{dt} + \frac{d'\vec{r}\,'}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$
$$= \vec{v}_{oo'} + \vec{v}\,' + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'.$$

Si la partícula está en reposo en el sistema S' = O'x'y'z' , $\vec{v}\,'=0$ y la velocidad absoluta de la partícula coincide con la velocidad con que es transportada por el sistema móvil, así que ahora la velocidad de arrastre o transporte es.

$$\boxed{\vec{v}_T = \vec{v}_{oo'} + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'}$$

Notar que debido a la diferencia entre los vectores $\vec{r}$ y $\vec{r}'$, ahora en esta ecuación aparece $\vec{r}'$, y no $\vec{r}$ como antes.

Con esa definición el Teorema de Roverbal queda expresado como:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_T}$$

I-4d.ii) Teorema de Coriolis.

En cuanto a la aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}' + \vec{v}_T)}{dt} = \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d(\vec{v}_{oo'} + \vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt} =$$
$$= \frac{d\vec{v}_{oo'}}{dt} + \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} =$$
$$\frac{d\vec{v}_{oo'}}{dt} + \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

que agrupando términos conduce a

$$\vec{a} = \vec{a}_{oo'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

Como siempre la aceleración de transporte se puede reconocer suponiendo que P no se mueve respecto al sistema móvil, en ese caso:

$$\boxed{\vec{a}_T = \vec{a}_{oo'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}$$

y si consideramos la definición anterior de la aceleración de Coriolis:

$$\boxed{\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'}$$

y con las definiciones anteriores recuperamos el *Teorema de Coriolis*:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C}$$

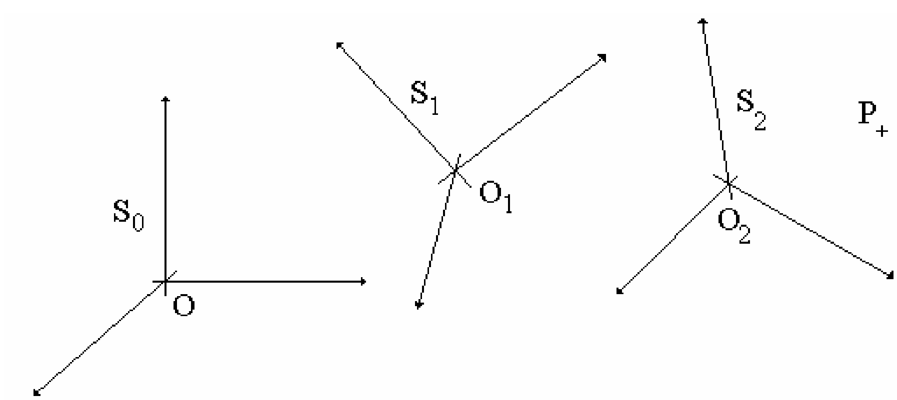
donde, para que sea la forma más general del mismo tenemos que usar la definición correcta de aceleración de transporte anterior, donde resaltamos nuevamente que el vector posición que aparece en ella es $\vec{r}' = P - O'$.

I-4e. Adición de velocidades angulares.

Consideremos ahora que queremos estudiar el movimiento relativo entre varios sistemas de referencia. Dado que hemos estudiado detalladamente el movimiento de una partícula respecto a dos sistemas con movimiento relativo, consideremos una partícula P, moviéndose arbitrariamente en el espacio. Y consideremos tres sistemas de referencia diferentes, a los que llamaremos:

- S_0: Sistema Absoluto.
- S_1: Sistema de Arrastre.
- S_2: Sistema Móvil.

Solidario a cada uno de estos sistemas de referencia consideraremos un sistema de coordenadas solidario a ellos con orígenes de coordenadas O, O_1 y O_2, respectivamente. A la velocidad angular del sistema S_j respecto al sistema S_i le llamaremos $\vec{\omega}_{ji}$. O sea:



$\vec{\omega}_{10}$ es la velocidad angular del sistema S_1 respecto al S_0.

$\vec{\omega}_{21}$ la del sistema S_2 respecto al S_1.

$\vec{\omega}_{20}$ la del sistema S_2 respecto al S_0.

También utilizaremos un superíndice *i* para decir que estamos considerando la velocidad de un punto respecto a uno u otro sistema; o sea, $\vec{v}_{\mathrm{A}}^{(i)}$ es la velocidad de un punto A respecto a un sistema S_i.

Considerando, para simplificar, que ahora P es solidario al sistema S_2, es decir que su velocidad relativa respecto a S_2 es nula:

1) La velocidad de P respecto a S_0 es igual a la velocidad de transporte de P respecto a este sistema:
$$\vec{v}_{\mathrm{P}}^{(0)} = \vec{v}_{\mathrm{O}_2}^{(0)} + \vec{\omega}_{20} \times (P - O_2)$$

2) La velocidad de P respecto a S_1 es ahora la velocidad de transporte respecto a S_2:
$$\vec{v}_{\mathrm{P}}^{(1)} = \vec{v}_{\mathrm{O}_2}^{(1)} + \vec{\omega}_{21} \times (P - O_2)$$

3) Y finalmente escribimos la velocidad de P respecto al sistema S_0, pero haciendo uso de que la anterior es la velocidad relativa de P respecto al sistema de arrastre:
$$\vec{v}_{\mathrm{P}}^{(0)} = \vec{v}_{\mathrm{P}}^{(1)} + \vec{v}_{\mathrm{O}_1}^{(0)} + \vec{\omega}_{10} \times (P - O_1)$$

Sustituyendo la penúltima en la anterior y operando se obtiene:

$$\vec{v}_{\mathrm{P}}^{(0)} = \vec{v}_{\mathrm{O}_2}^{(1)} + \vec{\omega}_{21} \times (P - O_2) + \vec{v}_{\mathrm{O}_1}^{(0)} + \vec{\omega}_{10} \times (P - O_2 + O_2 - O_1) =$$

$$= \vec{v}_{\mathrm{O}_2}^{(1)} + \vec{\omega}_{21} \times (P - O_2) + \vec{v}_{\mathrm{O}_1}^{(0)} + \vec{\omega}_{10} \times (P - O_2) + \vec{\omega}_{10} \times (O_2 - O_1) =$$

$$= \vec{v}_{\mathrm{O}_2}^{(1)} + \vec{v}_{\mathrm{O}_1}^{(0)} + \vec{\omega}_{10} \times (O_2 - O_1) + (\vec{\omega}_{21} + \vec{\omega}_{10}) \times (P - O_2)$$

Observemos que si P coincide con O_2 tenemos, de la ecuación que daba la velocidad de P respecto a S_0 tendremos:
$$\vec{v}_{\mathrm{O}_2}^{(0)} = \vec{v}_{\mathrm{O}_2}^{(1)} + \vec{v}_{\mathrm{O}_1}^{(0)} + \vec{\omega}_{10} \times (O_2 - O_1)$$

Así:

$$\vec{v}_{P}^{(0)} = \vec{v}_{O_2}^{(0)} + \left(\vec{\omega}_{21} + \vec{\omega}_{10}\right) \times \left(P - O_2\right)$$

Comparando esta ecuación con la primera de todas, podemos escribir que:

$$\left(\vec{\omega}_{21} + \vec{\omega}_{10}\right) \times \left(P - O_2\right) = \vec{\omega}_{20} \times \left(P - O_2\right)$$

Como P es un punto arbitrario, y esta igualdad debe valer para todo punto P tendremos que:

$$\boxed{\vec{\omega}_{20} = \vec{\omega}_{21} + \vec{\omega}_{10}}$$

Que es el denominado *Teorema de Adición de Velocidades Angulares*, que nos dice que la velocidad angular de un sistema móvil S_2 respecto a otro S_0, considerado como absoluto, puede expresarse como la suma de la velocidad angular de ese sistema respecto a otro intermediario o de arrastre S_1, más la velocidad angular de este respecto al absoluto.

Esta relación es muy útil cuando queremos calcular la velocidad angular de un sistema cualquiera moviéndose en el espacio. Es conocido que un movimiento cualquiera en el espacio se puede descomponer en una traslación y giros elementales. La solución al Ejercicio 1 anterior, nos enseña como calcular la velocidad angular de un movimiento plano; esto es, en definitiva uno de estos movimientos elementales. Considerando sistemas intermediarios se puede descomponer cualquier rotación en el espacio en tres giros elementales que tendrán una expresión similar para la velocidad angular (derivada del ángulo de giro correspondiente). Luego, utilizando este teorema en forma consecutiva podremos hallar cuál es la velocidad angular del movimiento compuesto. [14] Entraremos en los detalles de esto en el último capítulo, cuando estudiemos los Ángulos de Euler, pero de aquí hasta allá nos queda un largo camino por recorrer.

Ejemplo:

Consideremos un sistema S_0, absoluto, y dos sistemas S_1 y S_2, que giran respecto al anterior, pero que entre ellos solo se trasladan. Por ejemplo, en el Ejemplo 3 anterior S_0 es el sistema fijo $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, S_1 es el $O\vec{i}'\vec{j}'\vec{k}$ y S_2 es un sistema $P\vec{i}'\vec{j}'\vec{k}$, siendo P la partícula que se

[14] - Acotemos, antes de terminar, que a pesar de que la velocidad angular siempre se puede escribir como $\vec{\omega}=\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k}$ en alguna base $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, esto no implica que cada una de las componentes esté asociada a un giro elemental.

mueve con velocidad constante respecto a S_1. Como el movimiento de S_2 respecto a S_1, es sólo de traslación, tendremos que:

$$\vec{\omega}_{21} = 0$$

Y aplicando el teorema de Adición de Velocidades Angulares tenemos que:

$$\vec{\omega}_{20} = \vec{\omega}_{10} = \dot{\varphi}\vec{k}$$

Hagamos ahora un cambio de nombre entre los sistemas, basicamente intercambiando el orden entre S_0 y S_1:

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S_1' \\ S_1 &\rightarrow S_0' \\ S_2 &\rightarrow S_2' \end{aligned}$$

Y escribiendo las nuevas velocidades angulares con primas, tendremos:

$$\vec{\omega}'_{20} = \vec{\omega}'_{21} + \vec{\omega}'_{10} \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{\omega}'_{20} &= \vec{\omega}_{21} \\ \vec{\omega}'_{21} &= \vec{\omega}_{20} \\ \vec{\omega}'_{10} &= \vec{\omega}_{01} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01} = 0$$

Por lo que:

$$\vec{\omega}_{01} = -\vec{\omega}_{20} = -\dot{\varphi}\vec{k} = -\vec{\omega}_{10}$$

lo que demuestra por qué la hormiga del ejemplo 4 tiene que mantenerse moviéndose con una velocidad que forme un ángulo cuya derivada sea igual y opuesta a la velocidad angular del disco; y que en forma más general, quiere decir que si un sistema se mueve respecto a otro con velocidad angular $\vec{\omega}$, este último se mueve respecto al primero con velocidad angular $-\vec{\omega}$.

Un razonamiento similar nos permite demostrar a través del Teorema de Roverbal aplicado a la traslación, que si un sistema se traslada respecto a otro con velocidad $\vec{v}$, este último lo hará respecto al primero con velocidad $-\vec{v}$.

Apéndice: Velocidad Angular

En la Sección I-4c.i vimos que la derivada de los versores de una base móvil $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ respecto a una fija, $\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$ podían escribirse en dicha base móvil como:

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt}=a_{11}\,\vec{i}\,'+a_{12}\,\vec{j}\,'+a_{13}\,\vec{k}\,'$$

$$\frac{d\vec{j}\,'}{dt}=a_{21}\,\vec{i}\,'+a_{22}\,\vec{j}\,'+a_{23}\,\vec{k}\,'$$

$$\frac{d\vec{k}\,'}{dt}=a_{31}\,\vec{i}\,'+a_{32}\,\vec{j}\,'+a_{33}\,\vec{k}\,'$$

Luego, usando las propiedades de que $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ cualquier vector que varía en el tiempo manteniendo su módulo constante es perpendicular a sí mismo esto se reducía a:

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt}= a_{12}\,\vec{j}\,'+a_{13}\,\vec{k}\,'$$

$$\frac{d\vec{j}\,'}{dt}=a_{21}\,\vec{i}\,'+ a_{23}\,\vec{k}\,'$$

$$\frac{d\vec{k}\,'}{dt}=a_{31}\,\vec{i}\,'+a_{32}\,\vec{j}\,'$$

Y por ser cada uno de los vectores de la base normal a los demás:

$$a_{12} = \frac{d\vec{i}\,'}{dt}.\vec{j}\,'=-\vec{i}\,'.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}= a_{21}$$

$$a_{23} = \frac{d\vec{j}\,'}{dt}.\vec{k}\,'=-\vec{j}\,'.\frac{d\vec{k}\,'}{dt}= a_{32}$$

$$a_{31} =\frac{d\vec{k}\,'}{dt}.\vec{i}\,'=-\vec{k}\,'.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}= -a_{13}$$

Luego podemos escribir, por ejemplo, solo para el primero de los versores de la base:

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt}=\left(\frac{d\vec{i}\,'}{dt}.\vec{j}\,'\right)\vec{j}\,'+\left(-\frac{d\vec{k}\,'}{dt}.\vec{i}\,'\right)\vec{k}\,'$$

Usando las propiedades de que la base es ortonormal directa:

$$\vec{j}\,'=\vec{k}\,'\times\vec{i}\,' \qquad \text{y} \qquad \vec{k}\,'=\vec{i}\,'\times\vec{j}\,'=-\vec{j}\,'\times\vec{i}\,'$$

podemos escribir:

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt}=\left[\left(\frac{d\vec{i}\,'}{dt}.\vec{j}\,'\right)\vec{k}\,'\right]\times\vec{i}\,'+\left[\left(\frac{d\vec{k}\,'}{dt}.\vec{i}\,'\right)\vec{j}\,'\right]\times\vec{i}\,'$$

y agregando el siguiente término, que es cero porque todo vector multiplicado vectorialmente por sí mismo es nulo:

$$\left[\left(\frac{d\vec{j}\,'}{dt}.\vec{k}\,'\right)\vec{i}\,'\right]\times\vec{i}\,'=0$$

podemos escribir:

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt}=\left[\left(\frac{d\vec{i}\,'}{dt}.\vec{j}\,'\right)\vec{k}\,'+\left(\frac{d\vec{k}\,'}{dt}.\vec{i}\,'\right)\vec{j}\,'+\left(\frac{d\vec{j}\,'}{dt}.\vec{k}\,'\right)\vec{i}\,'\right]\times\vec{i}\,'$$

y llegamos nuevamente a que: $\frac{d\vec{i}\,'}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{i}\,'$ si hacemos:

$$\boxed{\vec{\omega}=\left(\frac{d\vec{i}\,'}{dt}.\vec{j}\,'\right)\vec{k}\,'+\left(\frac{d\vec{k}\,'}{dt}.\vec{i}\,'\right)\vec{j}\,'+\left(\frac{d\vec{j}\,'}{dt}.\vec{k}\,'\right)\vec{i}\,'}$$

Esta es una expresión que nos determina, en forma *única*, la velocidad angular, y que podemos ver es exactamente la misma que hallada anteriormente. Observar que la misma es completamente simétrica en los vectores de la base, y si hacemos una permutación circular de los mismos se mantiene incambiada. Por lo que a pesar de que la demostración la hicimos solamente para $\frac{d\vec{i}\,'}{dt}$ solamente, tendremos un resultado equivalente para exactamente el mismo resultado para $\frac{d\vec{j}\,'}{dt}$ y $\frac{d\vec{k}\,'}{dt}$, es decir:

$$\frac{d\vec{j}\,'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}\,'$$

$$\frac{d\vec{k}\,'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}\,'$$

siendo $\vec{\omega}$ el mismo de antes.