

CAPÍTULO 0

INTRODUCCIÓN Y CONCEPTOS PRELIMINARES

0.0 - Introducción al Curso.

Las presentes *notas* de Mecánica corresponden al curso 1999 de Mecánica Newtoniana del Ciclo Único de Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República y tienen el objeto de suplir la carencia de textos de la materia adecuados al mismo. Constan básicamente de dos partes, además de este capítulo introductorio agregado para el curso 1999. La primera parte corresponde a los Capítulos 1 a 4 y trata sobre Mecánica de la Partícula. Estos capítulos están basados en los apuntes correspondientes al curso de Mecánica I del Ciclo Básico de Ingeniería (Plan 1989), el cual era el primer curso de Física que los estudiantes de Ingeniería veían en su carrera. El curso actual de Mecánica Newtoniana es un segundo curso sobre el tema con que los estudiantes se encuentran en el presente Plan de Estudios, por eso la parte introductoria de cada uno de ellos debe considerarse más como un repaso de temas ya estudiados en Física General 1, que como temas nuevos. Sin embargo, todos ellos profundizan y extienden los conceptos, llevándolos a un ámbito más formal y general que el visto anteriormente. Estos temas de repaso son mantenidos en estos capítulos porque son parte del orden lógico en que deben desarrollarse.

La segunda parte, correspondiente a Mecánica de Sistemas de Partículas, y principalmente Mecánica de Sistemas Rígidos, son apuntes que fueron creados expresamente para el curso 1998, año en que se dictó por primera vez esta asignatura. Los mismos ya fueron creados para el contexto en que los temas serían dictados, pero como tales están en una etapa más *verde*, en el sentido de que no han sido revisados lo suficiente como lo fueron aquellos de la primera parte. Esto puede llevar a pensar que son más *breves* en extensión, pero esto es causado por el hecho de que aún no han *crecido y alcanzado su madurez*. Por eso llamamos la atención a los estudiantes para que no menosprecien esta parte del curso, que es en realidad la más importante.

Finalmente queremos resaltar que entendemos que estas *notas* deben considerarse como tales; es decir, son *notas y/o apuntes* pero no son un libro de texto, ya que a pesar de la constante revisión a la que las mismas son sometidas, siempre existen errores u omisiones diversas, siendo las mismas, por fortuna, principalmente problemas tipográficos o de edición. Por este motivo pedimos a todos aquellos estudiantes que las utilicen, que las lean con espíritu crítico, no solamente para poder estar atentos a estos errores, sino porque es el cuestionamiento constante de las nuevas ideas lo que permite razonar y entender las mismas, para poder seguir de esta manera el proceso lógico de aprendizaje de una materia. Pedimos también que aquellos suficientemente emprendedores que encuentren este tipo de errores nos los hagan llegar, así también como comentarios en general, para poder ir mejorando y adecuándolas al curso en las sucesivas ediciones de las mismas.

0.1 - Introducción a la Introducción.

Este Capítulo 0 fue agregado con el objeto de hacer un repaso de las herramientas matemáticas y otros conceptos que serán usados en el curso correspondiente. El estudio de la Mecánica para Ingenieros tiene una doble importancia. Por un lado está el aspecto técnico, de que con el aprendizaje de unos pocos principios y la aplicación de los mismos se podrán resolver problemas prácticos. Los problemas serán tanto de equilibrio de sistemas (*Estática*) en el diseño de estructuras fijas, por ejemplo puentes y edificios, como también en el de sistemas en movimiento (*Dinámica*) que es de gran utilidad en el análisis de estructuras en movimiento, por ejemplo, estructuras fijas sometidas a cargas bruscas, o el diseño de todo tipo de maquinarias tales como motores, buques, automóviles o aviones, y hasta el movimiento de los electrones en un tubo de rayos catódicos.

Pero además del aspecto técnico anterior la Mecánica es una materia que permite el aprendizaje del análisis de problemas reales utilizando la artillería pesada de la Matemática. Este lenguaje, necesario para el estudio y resolución de los problemas de esta materia, pero que también se aplica a muchas ramas de la Ciencia, tuvo que esperar que Isaac Newton (1642-1727) desarrollase el cálculo diferencial para poder extender las ideas previamente establecidas por Galileo Galilei (1564-1642) sobre la Dinámica postulándolas en forma de tres principios básicos denominados las *leyes de Newton*; y que con el uso de instrumentos de precisión, como el reloj de péndulo inventado por Christiaan Huygens (1629-1695), se pudiesen hacer comparaciones cuantitativas entre diferentes experimentos con los principios teóricos por ellos desarrollados. Más tarde Leonhard Euler (1707-1783) desarrollaría mucho más las mismas para que fuesen una poderosa herramienta en las revoluciones tecnológicas e industriales de los siglos XVIII y XIX.

Para poder utilizar estas herramientas matemáticas en el estudio de los problemas reales es necesario idealizar los mismos, esto es debemos crear modelos que representen en forma esquemática el problema a estudiar. Como ejemplo consideremos el estudio de un automóvil

moviéndose en una carretera con un motor de determinada potencia; queremos saber cuánto tiempo demorará en recorrer cierta distancia en determinadas condiciones. Puede ser suficiente (e importante en la simplificación del problema) considerar el mismo simplemente como una partícula puntual moviéndose sobre una recta. Esto significa despreciar la forma y dimensiones de dicho cuerpo. Luego, para el estudio de este problema, alcanzaría la aplicación de lo que el estudiante aprenderá en la primer parte de este curso. Sin embargo, puede quererse estudiar el problema más a fondo. Para ello tal vez querríamos modelar el auto como un cuerpo de dimensiones a determinar apoyado sobre sus ruedas, las que se modelarían como figuras circulares rígidas. Porque una figura o cuerpo (como le llamaremos posteriormente) sea rígido entendemos que todos los movimientos relativos de las diferentes partes del mismo entre sí son pequeños (o sea, *despreciables*) frente al movimiento del cuerpo en su conjunto. Para el estudio de este nuevo modelo de auto, debemos recurrir a lo que el estudiante aprenderá en la segunda parte de este curso.

Cuál de los dos modelos nos sirve para resolver el problema dependerá de la profundidad del estudio en particular que deseemos realizar. Es decir, la respuesta al problema dependerá del planteo del mismo; o sea, de la elección de un modelo u otro. Y obviamente la resolución en general será más complicada para el modelo más complicado, e incompleta en algunos casos para el modelo más sencillo. Muchas veces la parte más difícil de la resolución de un problema en particular es el planteo del mismo. En este curso esa parte ya vendrá por lo general previamente resuelta, y lo que se pretende que el estudiante realice es la utilización de las herramientas matemáticas para la resolución de la situación física descrita mediante una idealización que se le presentará en el enunciado del problema.

Hacemos notar que en este, nuestro segundo modelo de auto, se ha idealizado las ruedas del mismo como rígidas, mientras que si es un auto decente con ruedas neumáticas, las mismas se deformarán con el peso del auto sobre ellas. O sea, estamos *aproximando la realidad física* con un modelo matemático, porque consideramos no es de importancia la deformación de las mismas. Como veremos, en este curso, siempre despreciaremos este tipo de movimientos *internos* o deformaciones de los cuerpos.

Además de eso, dado que el modelo matemático en algunos casos puede no presentar una solución analítica simple, es necesario hacer algunas *aproximaciones matemáticas*; es decir, que los datos del problema verifiquen algunas relaciones que nos permitan simplificar el problema matemático. En ese caso estaremos resolviendo la situación sólo para un rango determinado de validez adicional, más allá de la simplificación a que nos lleva el modelo.

Queda claro así que nosotros estudiaremos problemas ideales que serán aplicables a la realidad solamente bajo ciertas condiciones. Estas condiciones son el límite de aplicabilidad de nuestros modelos o teorías. Aclaremos que la Mecánica Newtoniana que estudiaremos, y que también se le llama Mecánica Clásica, no es aplicable a la resolución de todos los problemas posibles. Es decir, los principios simples en los que se basa cubren una amplia región de validez y de lo que podríamos llamar nuestro sentido *común* de la realidad. Pero no es posible de resolver con los mismos, problemas que en la época en que estos principios fueron desarrollados aún

estaban lejos de ser planteados, como muestran las fechas en que vivieron sus mayores impulsores, dadas anteriormente. Efectivamente, la Mecánica Clásica no *es* completa ni *debe* ser considerada la verdad absoluta de todo el universo (como ninguna teoría actual debe serlo). Toda teoría basada en un conjunto de postulados vale solo en aquellas condiciones en que los mismos son aplicables, y la Mecánica Clásica como tal deja de ser válida cuando se cumplen una de las siguientes tres condiciones:

- 1) los objetos en movimientos que se están estudiando se mueven muy “*rápido*”,
- 2) los objetos en movimiento que se están estudiando son muy “*pequeños*”,
- 3) los objetos en movimiento que se están estudiando están cerca de objetos muy “*masivos*”.

Efectivamente, en el caso de que los objetos en estudio se muevan a velocidad cercana a la velocidad de la luz, los postulados de la Mecánica Clásica precisan de postulados adicionales que dan lugar a la Mecánica *Relativista*. La velocidad de la luz es de $3 \times 10^8 \text{ m/s} = 1,1 \times 10^9 \text{ km/hr}$, que como veremos está muy por encima de todas las velocidades que estudiaremos a lo largo de este curso, y muy por encima de las velocidades que involucrarán los trabajos técnicos de casi todos los Ingenieros que egresan de esta Facultad.

Por otro lado, cuando se estudia el movimiento de partículas *reales* muy pequeñas, como el movimiento de los electrones en torno del núcleo del átomo, o el movimiento de los portadores de carga en un transistor de última generación, se precisa la utilización de postulados completamente diferentes a los de la Mecánica Clásica, que dan lugar a la denominada Mecánica *Cuántica*. El problema surge aquí porque la Mecánica Newtoniana idealiza para su tratamiento matemático la existencia de partículas infinitamente pequeñas (puntos) con masas no nulas. Esto es una idealización muy razonable para el mundo *macroscópico* en el que vivimos. Pero en un mundo *nanoscópico* en que las distancias involucradas sean del orden del nanómetro ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) o menores, entonces esto puede ya no ser cierto.¹

¹ - Tratando de no dejar esta idea demasiado vaga, expliquemos que la Mecánica Cuántica plantea que toda partícula tiene un comportamiento dual: como partícula o como onda. En nuestro mundo macroscópico todos los objetos pueden considerarse como macroscópicos. Sin embargo, por ejemplo en el caso de los electrones, puede manifestarse un comportamiento u otro indiferentemente. Cuando el comportamiento como partícula es el que prevalece, entonces valen los postulados de la Mecánica Clásica, pero cuando prevalece el comportamiento como onda debe recurrirse a la Mecánica Cuántica.

En forma anecdótica, digamos en la época en que se desarrolló la Mecánica Clásica, también se discutía cuál era la naturaleza de la luz. Isaac Newton afirmaba la existencia de corpúsculos o partículas de luz, en cuanto que Christiaan Huygens mantenía que la luz era una onda. La Mecánica Cuántica, creada y desarrollada en la primera mitad del siglo XX (más de 200 años después de esas discusiones) vino a demostrar que ambas proposiciones eran correctas.

Finalmente, y sin entrar tampoco en los detalles, los objetos muy masivos, generan *campos gravitatorios* intensos y modifican drásticamente la descripción espacio temporal de la mecánica newtoniana. Pero, dado que aún no hemos ni descrito estos elementos para nuestro caso, pasaremos a continuación a definir los Conceptos Preliminares que utilizaremos a lo largo de todo el curso.

0.2 – Conceptos Fundamentales.

A continuación pasaremos a dar algunas definiciones y conceptos que son fundamentales y deben comprenderse desde un principio. Muchas de ellas son casi intuitivas y todas ellas serán descritas por elementos matemáticos.

Para empezar todos nuestros elementos se ubicarán en el *espacio* (\mathbf{R}^3) que físicamente es una región que se extiende infinitamente en todas direcciones, y que matemáticamente lo describiremos por un espacio *afín* de tres dimensiones. Un punto de este espacio estará determinado por sus coordenadas medidas respecto a algún *sistema de referencia*. En el primer capítulo entraremos en detalle sobre que sistemas de coordenadas mediremos, y más adelante nos quedará claro que existen muchos tipos de sistemas de referencia; pero asumiremos que existe uno preferencial al que llamaremos *sistema de referencia inercial primario* o *sistema de Copérnico*, y diremos que este está “fijo” en el espacio y los demás pueden moverse respecto de él. Aquellos que se muevan con velocidad constante serán también *inerciales*, y en ellos valdrán las leyes de Newton, mientras que en los que son acelerados (velocidad variable) respecto del mismo son *no-inerciales* y en ellos habrá que hacer ciertas modificaciones en las ecuaciones fundamentales a las que lleguemos.

El espacio con el que trabajaremos es un espacio *euclídeo*; es decir tenemos una métrica euclideana para definir conceptos tales como la distancia entre dos puntos, el área de una superficie o el volumen de una región de dicho espacio. Todas estas magnitudes están relacionadas. Definiéndose una magnitud o unidad fundamental de *longitud*, por ejemplo: *metros*, todas las distancias se medirán entonces en metros (m); las áreas en metros cuadrados (m^2) y los volúmenes en metros cúbicos (m^3).

Pretendemos estudiar el movimiento de los objetos, y como vemos, hasta los sistemas de referencia, o de coordenadas en que describimos nuestro espacio se estarán moviendo, precisamos describir este movimiento de alguna forma. Para ello introducimos el *tiempo* como una variable matemática que nos da una medida de la sucesión de los acontecimientos. En Mecánica Newtoniana esto es una cantidad absoluta. El pasaje del tiempo es inexorable e independiente de cualquier otro parámetro o acontecimiento, por lo que matemáticamente será siempre *una variable*

independiente.² El tiempo entonces se interpreta como una magnitud independiente de la longitud y por tanto se mide en unidades *independientes* (por ejemplo: *segundos*).

Nuestro interés es no sólo describir el movimiento de esos sistemas de referencia, sino también el de objetos del mundo real. Como hemos dicho, nosotros trabajaremos con objetos ideales que pretenden describir o modelar objetos que existen en el espacio real. La *materia* es la sustancia que ocupa el espacio y de la que los cuerpos reales están hechos. El movimiento de esa materia, está gobernado por la *inercia* de la misma. La *inercia* es la propiedad de la materia que origina una oposición a la variación de su movimiento. Este es un concepto *nuevo* que aparece en la Mecánica Newtoniana a diferencia de lo que se creía anteriormente. La *masa* es tan solo una medida cuantitativa de la inercia. Y dado que este concepto es también nuevo, entonces se introduce también como una magnitud fundamental y se mide en una unidad independiente de las de longitud y tiempo (por ejemplo: *kilogramo*).

Cualquier superficie cerrada llena de materia es lo que llamaremos un *cuerpo*. Y en la primer parte del curso utilizaremos el concepto de *partícula* o *punto material* que es un cuerpo de dimensiones despreciables, o sea, un punto con masa. En ciertos casos se puede tratar como punto material un cuerpo de dimensiones finitas, por ejemplo: el auto del primer modelo mencionado anteriormente. En otros casos el punto material puede ser un elemento diferencial, o sea, cualquier cuerpo puede suponerse formado por infinitos puntos materiales; por eso, al estudiar sistemas de partículas en la segunda parte del curso, estaremos planteando las bases para el estudio de cualquier cuerpo. En particular nos concentraremos en *cuerpos rígidos*, que como dicho es aquel que no sufre deformación relativa entre sus partes.

La idea básica de la Mecánica Newtoniana es que los cuerpos se mueven porque están sometidos (o no) alguna *fuerza*. La *fuerza* es la acción de un cuerpo sobre otro. A pesar de ellos los cuerpos no tienen que estar en contacto y aceptamos el concepto de interacción a distancia. Las fuerzas tienden a hacer que un cuerpo se mueva de acuerdo a la acción de las mismas. Es el estudio de esta influencia y cómo el movimiento de un determinado cuerpo cambia ante la acción de una fuerza el objeto principal de este curso. Al desarrollar este estudio veremos que no precisamos introducir nuevas magnitudes fundamentales ni nuevas unidades independientes para medir la fuerza, pero aclaremos que es en sí una magnitud diferente de las antes descritas.

² - En Relatividad, o sea, cuando estudiamos objetos moviéndose a velocidades cercanas a la de la luz, este concepto debe ser modificado y el tiempo es una coordenada más, dependiente del sistema de referencia en que se trabaja.

0.3 – Elementos Matemáticos.

A continuación damos un breve repaso de los elementos algebraicos más importantes con los que trabajaremos y sus propiedades fundamentales.

0.3.a - Escalares.

Una cantidad *escalar* es aquella a la cual se asocia solamente una variable; o sea, para su completa descripción alcanza el enunciado algebraico de su magnitud. La distinción importante que debemos hacer es que el valor que un escalar tome *no depende* del sistema de coordenadas en que se lo mida. Por ejemplo: el tiempo, el radio de un círculo, la distancia entre dos puntos, un área, un volumen, la masa, la densidad, la energía o la potencia. Muchas de estas cantidades pueden tener solo valores positivos, mientras que otros (tiempo, energía y potencia) pueden ser negativos también. Como vemos, todos estos ejemplos toman valores dentro del conjunto de los números reales (y en general todas las cantidades que utilizaremos en este curso son números reales). Cualquier operación entre escalares será también un escalar.

En algunos casos, como la energía, cierta precaución debe ser tomada en cuenta. La misma, como la definiremos posteriormente es el producto de varios escalares. Como tal es una cantidad escalar. Pero la definición en sí dependerá del sistema de referencia en consideración, por lo que la energía dependerá del mismo, porque la propia definición depende de los sistemas.

0.3.b - Vectores.

Una *cantidad vectorial* o *vector* es aquella a que se le asocia no sólo una magnitud, sino también una dirección y un sentido. Ejemplos de vectores son un desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, la cantidad de movimiento o el momento angular.

Los estudiantes deben estar completamente familiarizados con los vectores y su representación en coordenadas, pero repasemos aquí las ideas básicas. Nosotros distinguiremos dos tipos de vectores: los *vectores libres*, que es a los que nos referimos en este momento, y los *vectores aplicados*, sobre los que nos extenderemos en este capítulo posteriormente.

0.3.b.i) Operaciones con Vectores.

Las operaciones definidas para el espacio de los vectores son las siguientes:

- El producto de un vector por un escalar: si \vec{a} es un vector y b un escalar, entonces el producto de ambos será un vector $\vec{c} = b\vec{a}$.
- La suma de dos vectores: si \vec{a} y \vec{b} son vectores, la suma de ambos es un vector $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Tenemos definidos dos productos de vectores diferentes:

- El producto *escalar* de dos vectores: $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$ donde \vec{a} y \vec{b} son vectores y c un escalar.

El producto escalar de un vector por si mismo es lo que se llama el cuadrado del vector, que obviamente es un escalar, y es igual al cuadrado de su *módulo* o *norma*. O sea:

$$\left| \vec{a} \right|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \quad (0.1)$$

El último término en la ecuación anterior es una notación que utilizaremos.

Cuando un vector tiene cuadrado unitario, es decir, su norma vale 1, se dice que se trata de un *versor*, y si el producto escalar de dos vectores es nulo los vectores son *ortogonales*.

- El producto *vectorial* de dos vectores: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ³ donde tanto \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} son todos vectores.

En algunos casos a aquellos vectores que provienen de una operación de un producto vectorial se los diferencia llamándoles *seudovectores*, porque tienen comportamientos diferentes frente a la simetría especular, pero esto no tendrá mayor importancia para nosotros, y sí conviene distinguir que muchos vectores a los que nosotros llamaremos *momentos* están originados en una operación de producto vectorial. Pero entraremos en detalle cuando hablemos de vectores aplicados.

³ - A veces también se usa la notación $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.

0.3.b.ii) Base de Vectores Libres.

Para representar un vector libre debemos tener una determinada *base* de vectores libres. Por *base* de vectores libres entendemos un conjunto de *tres* vectores *linealmente independientes*, que por ser el espacio de los vectores en cuestión de *tres* dimensiones, alcanza para generar, a partir de las operaciones anteriores, *todos* los vectores de dicho espacio. Usualmente trabajaremos con bases *ortonormales*, en que los vectores de la base son versores ortogonales entre sí. O sea, en una base ortonormal formada por los vectores $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3$ (o genéricamente diremos $\left\{ \vec{\mathbf{e}}_i \right\}$ con $i = 1, 2, \text{ o } 3$) se cumple:

$$\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} \quad (0.2)$$

donde δ_{ij} es la delta de *Kronecker* que cumple que:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (0.3)$$

Las bases ortonormales pueden ser directas o indirectas, según sea el comportamiento de sus vectores frente al producto vectorial. Una base es ortonormal *directa* cuando se verifica que:

$$\vec{\mathbf{e}}_i \times \vec{\mathbf{e}}_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \vec{\mathbf{e}}_k \quad (0.4)$$

donde:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } i, j, k \text{ es una permutación par de } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ es una permutación impar de } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (0.5)$$

es decir que, además de la propiedad obvia de que el producto vectorial de cualquier versor de la base por sí mismo es nulo, tendremos que:

$$\vec{\mathbf{e}}_1 \times \vec{\mathbf{e}}_2 = \vec{\mathbf{e}}_3 \quad \vec{\mathbf{e}}_2 \times \vec{\mathbf{e}}_3 = \vec{\mathbf{e}}_1 \quad \vec{\mathbf{e}}_3 \times \vec{\mathbf{e}}_1 = \vec{\mathbf{e}}_2 \quad (0.6)$$

y de que, dados dos vectores cualesquiera $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ se verifica (propiedad *anticonmutativa* del producto vectorial):

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}} \quad (0.7)$$

que:

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \quad (0.8)$$

El orden relativo que tienen que tener los vectores en el espacio es el indicado en la Figura 0.1, donde la perspectiva pretende ser tal que el versor \vec{e}_1 es *saliente* del plano de la hoja (que vendría dado por \vec{e}_2 y \vec{e}_3).

No debemos confundir una *base de vectores libres* con un *sistema de coordenadas* como los que serán descritos en el Capítulo 1, ni con los *sistemas de referencia* que utilizaremos para describir nuestra teoría. Un *sistema de coordenadas* es una base de vectores libres más un origen de coordenadas. Cualquier vector libre tendrá la misma representación en diferentes sistemas de coordenadas que tengan la misma base de vectores libres (o sea, los ejes de los sistemas de coordenadas sean paralelos).⁴

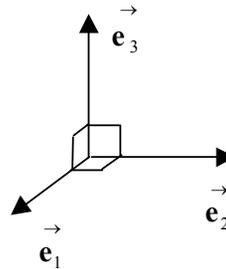


Figura 0.1

Finalmente un vector \vec{a} se representa en una determinada base de vectores libres a través de un conjunto *único* de tres números reales ordenados (es decir, un vector de \mathbf{R}^3) (a_1, a_2, a_3) que son sus proyecciones en cada uno de los tres versores de la base:

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i \quad (0.9)$$

y podemos escribir que:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i \quad (0.10)$$

Aclaremos que las coordenadas de un vector *no son cantidades escalares* porque dependen de los vectores de la base, como se ve a partir de la Ecuación 0.9.

⁴ - Tampoco debemos confundir los *sistemas de referencia* con los *sistemas de coordenadas*, ya que *diferentes* sistemas de coordenadas pueden utilizarse para describir *un mismo* sistema de referencia.

0.3.b.iii) Cambio de Base.

Supongamos que ahora deseamos cambiar de la base $\left\{ \vec{\mathbf{e}}_i \right\}$ a una nueva base ortonormal $\left\{ \vec{\mathbf{e}}'_i \right\}$. Los nuevos versores de la base continuarán verificando la condición de ortonormalidad pero estarán dirigidos en direcciones diferentes. Esto puede suceder cuando cambiamos de un determinado sistema de coordenadas a uno nuevo manteniendo el origen de coordenadas. Los nuevos ejes estarán girados respecto a los originales, lo que se representa dando nuevos versores para la dirección de cada uno de ellos.

Cualquier vector $\vec{\mathbf{a}}$ tiene una existencia independiente de la base en que queramos representarlo, por lo que, dado que los vectores que conforman la base han cambiado, según la Ecuación 0.9, sus coordenadas también cambiarán. Las nuevas coordenadas serán:

$$a'_i = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{e}}'_i \quad (0.11)$$

Para ver cuales son las relaciones entre esta y las antiguas precisamos definir mejor los versores de la nueva base, por lo que asumamos que λ_{ji} es la coordenada i -ésima del vector $\vec{\mathbf{e}}'_j$, o sea:

$$\lambda_{ji} = \vec{\mathbf{e}}'_j \cdot \vec{\mathbf{e}}_i \quad (0.12)$$

o sea:

$$\vec{\mathbf{e}}'_j = \sum_{i=1}^3 \lambda_{ji} \vec{\mathbf{e}}_i \quad (0.13)$$

Luego, teniendo en cuenta que los índices en las sumas son completamente arbitrarios:

$$a'_i = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{e}}'_i = \left(\sum_{j=1}^3 a_j \vec{\mathbf{e}}_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^3 \lambda_{ik} \vec{\mathbf{e}}_k \right) = \sum_{j,k=1}^3 \lambda_{ik} a_j \left(\vec{\mathbf{e}}_j \cdot \vec{\mathbf{e}}_k \right) = \sum_{j,k=1}^3 \lambda_{ik} a_j \delta_{jk}$$

por lo que, de la definición de la delta de Kronecker Ecuación 0.3 tendremos que:

$$\boxed{a'_i = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} a_j} \quad (0.14)$$

Esta es la relación que vincula las coordenadas del vector $\vec{\mathbf{a}}$ en la nueva base respecto a las coordenadas en la base original.

Si observamos bien y definimos las siguientes matrices reales:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

la relación 0.14 de cambio de coordenadas se puede escribir mucho más simple como:

$$\boxed{\mathbf{A}' = \mathbf{L}\mathbf{A}} \quad (0.15)$$

Es decir, la matriz \mathbf{A}' 3 x 1 formada por el arreglo ordenado de las coordenadas del vector $\vec{\mathbf{a}}$ en la nueva base $\{\vec{\mathbf{e}}'_i\}$, es igual a la matriz \mathbf{A} 3 x 1 similar de las coordenadas en la base original $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$, multiplicada a la izquierda por una matriz \mathbf{L} cuadrada 3 x 3 formada por las coordenadas de los vectores de la nueva base en la base original. A esta matriz \mathbf{L} se le llama *matriz de cambio de base*.

La relación 0.15 es la que define el comportamiento de un vector; es decir, cualquier cantidad con la que trabajemos será un vector si sus componentes ordenadas como matrices columna verifican esa relación ante un cambio de base ortonormal; o, equivalentemente la relación equivalente 0.14.

0.3.b.iv) Propiedades de la Matriz de Cambio de Base.

Es importante observar que \mathbf{A} y \mathbf{A}' , que como matrices son *diferentes* (es decir, tienen componentes diferentes), son la representación del *mismo* vector $\vec{\mathbf{a}}$ en dos bases *diferentes*. Esto es importante porque hay que recordar que el cuadrado de este vector, su módulo al cuadrado, definido como el producto de él por sí mismo (Ecuación 0.1), es un escalar, por lo que debe ser independiente de la base en que se calcule. Calculemoslo en una y otra base:

$$\vec{\mathbf{a}}^2 = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = \left(\sum_{i=1}^3 a_i \vec{\mathbf{e}}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 a_j \vec{\mathbf{e}}_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 a_i a_j \left(\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 a_i a_j \delta_{ij}$$

o sea que:

$$\vec{\mathbf{a}}^2 = \sum_{i=1}^3 a_i^2 \quad (0.16)$$

Similarmente:

$$\vec{\mathbf{a}}^2 = \sum_{i=1}^3 a_i'^2 \quad (0.17)$$

Haciendo uso de la relación 0.14:

$$\vec{\mathbf{a}}^2 = \sum_{i=1}^3 a_i'^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} a_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 \lambda_{ik} a_k \right) = \sum_{j,k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_{ij} \lambda_{ik} \right) a_j a_k = \sum_{i=1}^3 a_i^2$$

La última igualdad en esta relación proviene de la Ecuación 0.16 y del hecho de que, como dicho, el cuadrado de un vector es independiente de la base de coordenadas, por ser un escalar. Esta relación debe valer en forma general cualquiera sea el vector $\vec{\mathbf{a}}$ y por lo tanto cualquiera sean sus coordenadas. Por esta razón, para que se cumpla esa igualdad es necesario que los elementos de la matriz de cambio de base verifiquen la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_{ij} \lambda_{ik} = \delta_{jk} \quad (0.18)$$

En esta relación el orden de los subíndices tiene importancia. Los elementos λ_{ij} serían los elementos de una matriz transpuesta a la de una que tenga los elementos λ_{ji} . O sea, si definimos una matriz \mathbf{M} cuyos elementos sean $\mu_{ji} = \lambda_{ij}$, entonces esta matriz no es más que la matriz transpuesta de la de cambio de base \mathbf{L} :

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^T \quad (0.19)$$

Entonces la relación 0.18 nos diría que:

$$\sum_{i=1}^3 \mu_{ji} \lambda_{ik} = \delta_{jk} \quad (0.20)$$

lo que escrito en forma matricial es:

$$\mathbf{M}\mathbf{L} = \mathbf{I} \quad (0.21)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (0.22)$$

Esto implica que $\mathbf{M} = \mathbf{L}^T$ es la matriz inversa de \mathbf{L} , es decir:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^T = \mathbf{L}^{-1} \quad (0.23)$$

A las matrices que cumplen esta relación se les llama matrices *ortogonales*.

Luego, de la relación 0.15 podemos decir que las coordenadas del vector $\vec{\mathbf{a}}$ en la base $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ expresadas en función de la base $\{\vec{\mathbf{e}}'_i\}$ es:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{A}' = \mathbf{L}^T \mathbf{A}' \quad (0.24)$$

o lo que es lo mismo:

$$a_i = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ji} a'_j \quad (0.25)$$

0.3.b.v) Rotaciones respecto a un eje.

A manera de ejemplo vamos a ver ahora como queda la matriz de cambio de base cuando se gira la base respecto a uno de los ejes de la misma, por ejemplo, $\vec{\mathbf{e}}_3$. Consideremos entonces que queremos pasar de la base $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ a la $\{\vec{\mathbf{e}}'_i\}$, tales que $\vec{\mathbf{e}}'_3 = \vec{\mathbf{e}}_3$, y los otros versores están girados un ángulo α en sentido antihorario vistos desde el extremo de $\vec{\mathbf{e}}_3$, de manera que ambas bases siguen siendo ortonormales directas (Ver Figura 0.2).

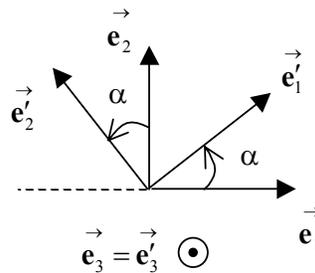


Figura 0.2

Para ver cuál es la matriz de cambio de base, debemos estudiar como cambian los vectores de la base. Para esto escribámoslos en forma genérica y luego hallemos sus componentes:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{e}}'_1 &= \lambda_{11} \vec{\mathbf{e}}_1 + \lambda_{12} \vec{\mathbf{e}}_2 + \lambda_{13} \vec{\mathbf{e}}_3 \\ \vec{\mathbf{e}}'_2 &= \lambda_{21} \vec{\mathbf{e}}_1 + \lambda_{22} \vec{\mathbf{e}}_2 + \lambda_{23} \vec{\mathbf{e}}_3 \\ \vec{\mathbf{e}}'_3 &= \lambda_{31} \vec{\mathbf{e}}_1 + \lambda_{32} \vec{\mathbf{e}}_2 + \lambda_{33} \vec{\mathbf{e}}_3\end{aligned}\quad (0.26)$$

Como $\vec{\mathbf{e}}'_3 = \vec{\mathbf{e}}_3$ tendremos en forma inmediata que: $\lambda_{31} = \lambda_{32} = 0, \lambda_{33} = 1$; y por la propiedad de ortogonalidad de la base será: $\lambda_{13} = \lambda_{23} = 0$. Por lo que:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{e}}'_1 &= \lambda_{11} \vec{\mathbf{e}}_1 + \lambda_{12} \vec{\mathbf{e}}_2 \\ \vec{\mathbf{e}}'_2 &= \lambda_{21} \vec{\mathbf{e}}_1 + \lambda_{22} \vec{\mathbf{e}}_2 \\ \vec{\mathbf{e}}'_3 &= \vec{\mathbf{e}}_3\end{aligned}\quad (0.27)$$

Multiplicando escalarmente cada una de las dos primeras ecuaciones por $\vec{\mathbf{e}}_1$ y $\vec{\mathbf{e}}_2$ tendremos que:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}'_1 &= \lambda_{11}, & \vec{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}'_1 &= \lambda_{12} \\ \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}'_2 &= \lambda_{21}, & \vec{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}'_2 &= \lambda_{22}\end{aligned}\quad (0.28)$$

Como todos los vectores aquí involucrados son versores, los productos escalares que allí aparecen serán los cosenos de los ángulos que forman entre sí dichos vectores. Fijándonos en la Figura 0.2 tendremos:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}'_1 &= \cos \alpha, & \vec{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}'_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \\ \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}'_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, & \vec{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}'_2 &= \cos \alpha\end{aligned}\quad (0.29)$$

Las relaciones vectoriales anteriores quedarán como:

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{e}}'_1 &= \cos \alpha \vec{\mathbf{e}}_1 + \sin \alpha \vec{\mathbf{e}}_2 \\
 \vec{\mathbf{e}}'_2 &= -\sin \alpha \vec{\mathbf{e}}_1 + \cos \alpha \vec{\mathbf{e}}_2 \\
 \vec{\mathbf{e}}'_3 &= \vec{\mathbf{e}}_3
 \end{aligned}
 \tag{0.30}$$

y la matriz de cambio de base será:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \tag{0.31}$$

La matriz inversa, que lleva de la base $\{\vec{\mathbf{e}}'_i\}$ a la $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ es:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \tag{0.32}$$

lo que implicaría que:

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{e}}_1 &= \cos \alpha \vec{\mathbf{e}}'_1 - \sin \alpha \vec{\mathbf{e}}'_2 \\
 \vec{\mathbf{e}}_2 &= \sin \alpha \vec{\mathbf{e}}'_1 + \cos \alpha \vec{\mathbf{e}}'_2 \\
 \vec{\mathbf{e}}_3 &= \vec{\mathbf{e}}'_3
 \end{aligned}
 \tag{0.33}$$

Este resultado puede verificarse intentando calcular las componentes de los versores de $\{\vec{\mathbf{e}}'_i\}$ en la base $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ como lo hicimos antes.

0.3.c - Tensores.

En la sección anterior dijimos que lo que caracteriza a un vector es la forma en que sus coordenadas cambian ante un cambio de base. También vimos que había dos tipos de productos de vectores por vectores:

- 1) El producto *escalar*, en que un vector multiplicado por otro vector da un *escalar*.
- 2) El producto *vectorial*, en que un vector multiplicado por otro vector da un tercer *vector*.

Aquí comenzaremos hablando de un tercer tipo de producto de vectores por vectores, que llamaremos el producto *tensorial* cuyo resultado es una clase de cantidad u objeto diferente, que es un *tensor*. Así como dijimos que lo que caracteriza a un escalar es que es *invariante* respecto a los sistemas de coordenadas; y dijimos que un vector es toda aquella cantidad que frente a los cambios de base sus coordenadas cambian de acuerdo a la Ecuación 0.14; de la misma forma definiremos un tensor según se comporten sus coordenadas frente a un cambio de base, es decir, frente a un cambio de coordenadas que involucre solamente una rotación.

Adelantando nuestro resultado, vimos que para describir un escalar precisamos solamente de un único número real. Para describir un vector precisamos de tres números reales, es decir sus tres coordenadas. O sea, dado que un escalar se representa por un número (una matriz 1 x 1) y un vector por un vector de \mathbf{R}^3 , es decir, una matriz 1 x 3, se verá que un tensor se representa por una matriz cuadrada 3 x 3.

0.3.c.i) Producto Tensorial.

Comenzaremos calculando como se expresa el producto escalar de dos vectores en función de sus coordenadas. Sean:

$$\vec{\mathbf{a}} = a_1 \vec{\mathbf{e}}_1 + a_2 \vec{\mathbf{e}}_2 + a_3 \vec{\mathbf{e}}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{\mathbf{e}}_i \quad \vec{\mathbf{b}} = b_1 \vec{\mathbf{e}}_1 + b_2 \vec{\mathbf{e}}_2 + b_3 \vec{\mathbf{e}}_3 = \sum_{i=1}^3 b_i \vec{\mathbf{e}}_i$$

Trabajando en forma similar como se dedujo la Ecuación 0.16:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \left(\sum_{i=1}^3 a_i \vec{\mathbf{e}}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 b_j \vec{\mathbf{e}}_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \left(\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

y definiendo la matriz 3 x 1 de coordenadas de $\vec{\mathbf{b}}$: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, lo anterior puede expresarse

como:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = \mathbf{A}^T \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \quad (0.34)$$

O sea que el producto *escalar* de dos vectores $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ se calcula como el producto de sus representaciones matriciales 3 x 1, dando lugar a un escalar, es decir, una matriz 1 x 1. Pero dadas dos matrices 3 x 1 \mathbf{A} y \mathbf{B} , existe otra forma de multiplicarlas que da lugar a una matriz \mathbf{C} cuadrada 3 x 3 que es la siguiente:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (0.35)$$

La matriz \mathbf{C} es la representación en coordenadas de una nueva cantidad, resultado de operación del multiplicar *tensorialmente* los vectores $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$. Este nuevo producto que denominamos *producto tensorial* lo identificaremos con el símbolo \otimes ; o sea, si denominamos $\vec{\mathbf{c}}$ a esta cantidad, entonces:

$$\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} \otimes \vec{\mathbf{b}} \quad (0.36)$$

0.3.c.ii) Cambio de Base y Definición de Tensores.

Observar que $\vec{\mathbf{c}}$ no es un vector, pues su representación en coordenadas no es una matriz 3 x 1, sino una matriz 3 x 3. Esto es lo que denominaremos un *tensor*. Como en el caso de un vector, en que no cualquier conjunto ordenado de tres números reales era un vector, un conjunto cualquiera de nueve números ordenados tampoco será un tensor. Un vector es un concepto más abstracto, siendo las coordenadas solo su representación en una determinada base, y las mismas deben de cambiar de acuerdo a la relación (0.14) al cambiar de base. De la misma forma no cualquier arreglo ordenado de nueve números será un tensor, sino sólo aquellos que verifiquen cierto comportamiento frente a los cambios de base lo serán.

De la Ecuación 0.35 vemos que las coordenadas, componentes o elementos de la matriz \mathbf{C} que representa al tensor $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{c}}$ en la base $\{\overset{\rightarrow}{\mathbf{e}}_i\}$ es:

$$c_{ij} = a_i b_j \quad (0.37)$$

Para que $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{c}}$ esté coherentemente definido, en la base $\{\overset{\rightarrow}{\mathbf{e}}_i\}$ los elementos de la matriz \mathbf{C}' que lo representa deben ser:

$$c'_{ij} = a'_i b'_j \quad (0.38)$$

ya que cualquier cantidad debe definirse en forma equivalente en una base u otra. Ahora bien, las coordenadas de $\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}$ y $\overset{\rightarrow}{\mathbf{b}}$ cambiarán según la Ecuación 0.14:

$$c'_{ij} = a'_i b'_j = \left(\sum_{k=1}^3 \lambda_{ik} a_k \right) \left(\sum_{l=1}^3 \lambda_{jl} a_l \right) = \sum_{k,l=1}^3 \lambda_{ik} a_k a_l \lambda_{jl}$$

O sea que, utilizando las Ecuaciones 0.37 y la definición de los elementos $\mu_{jl} = \lambda_{jl}$ para los elementos de $\mathbf{M} = \mathbf{L}^T$ tenemos que:

$$c'_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 \lambda_{ik} c_{kl} \mu_{lj} \quad (0.39)$$

lo que matricialmente puede escribirse como:

$$\mathbf{C}' = \mathbf{LCL}^T \quad (0.40)$$

Ahora sí se puede definir un tensor, como aquel elemento que se represente por un arreglo ordenado de 9 coordenadas en forma de una matriz 3 x 3, las cuales deben cambiar de acuerdo a la Ecuación 0.39, o equivalentemente la 0.40, ante un cambio de base.

0.3.c.iii) El Producto Tensorial como una Aplicación Lineal.

Los tensores antes definidos, y en particular la cantidad $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{c}} = \overset{\rightarrow}{\mathbf{a}} \otimes \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}}$ antes definida, pueden verse también de forma diferente, más que como cantidades en sí, como aplicaciones lineales, o funciones de vectores. Efectivamente, una *aplicación lineal* es una función que transforma un vector en otro vector, de forma que la misma cumple las propiedades usuales de

linealidad. Además de eso, las aplicaciones lineales suelen representarse por matrices cuadradas, de donde es inmediato asociar los tensores con las mismas.

Ahora entonces nos centraremos en interpretar el producto tensorial como una aplicación lineal.

Definamos por el momento la siguiente aplicación lineal \mathfrak{T} que cuando es aplicada a un vector $\vec{\mathbf{x}}$ arbitrario genera otro vector $\vec{\mathbf{y}}$ tal que verifica:

$$\vec{\mathbf{y}} = \mathfrak{T} \vec{\mathbf{x}} = \left(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{x}} \right) \vec{\mathbf{a}} \quad (0.41)$$

donde $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ son dos vectores de los que la aplicación \mathfrak{T} depende.

Observar que en la definición aparece un producto escalar $\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{x}}$, y el número que resulte de aquí está multiplicado por el vector $\vec{\mathbf{a}}$. Ambas operaciones son lineales por lo que la aplicación \mathfrak{T} será lineal; o sea, dados dos vectores $\vec{\mathbf{x}}_1$ y $\vec{\mathbf{x}}_2$ cualesquiera, y dos escalares α y β también cualesquiera:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\mathbf{y}}_1 = \mathfrak{T} \vec{\mathbf{x}}_1 \\ \vec{\mathbf{y}}_2 = \mathfrak{T} \vec{\mathbf{x}}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathfrak{T} \left(\alpha \vec{\mathbf{x}}_1 + \beta \vec{\mathbf{x}}_2 \right) = \alpha \vec{\mathbf{y}}_1 + \beta \vec{\mathbf{y}}_2 \quad (0.42)$$

Buscaremos entonces cuál es su representación matricial. Para ello hay que ver como se transforman los vectores de la base ante la misma, y las coordenadas del vector resultante serán las columnas de la matriz \mathbf{F} que represente a \mathfrak{T} en la base en cuestión:

$$\mathfrak{T} \vec{\mathbf{e}}_1 = \left(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 \right) \vec{\mathbf{a}} = b_1 \vec{\mathbf{a}} = a_1 b_1 \vec{\mathbf{e}}_1 + a_2 b_1 \vec{\mathbf{e}}_2 + a_3 b_1 \vec{\mathbf{e}}_3$$

$$\mathfrak{T} \vec{\mathbf{e}}_2 = \left(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_2 \right) \vec{\mathbf{a}} = b_2 \vec{\mathbf{a}} = a_1 b_2 \vec{\mathbf{e}}_1 + a_2 b_2 \vec{\mathbf{e}}_2 + a_3 b_2 \vec{\mathbf{e}}_3$$

$$\mathfrak{T} \vec{\mathbf{e}}_3 = \left(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_3 \right) \vec{\mathbf{a}} = b_3 \vec{\mathbf{a}} = a_1 b_3 \vec{\mathbf{e}}_1 + a_2 b_3 \vec{\mathbf{e}}_2 + a_3 b_3 \vec{\mathbf{e}}_3$$

entonces:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (0.43)$$

Efectivamente, la representación matricial de \mathfrak{F} coincide con la matriz de coordenadas \mathbf{C} del producto tensorial $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{c}}$, por lo que podemos concluir que ambas cosas son equivalentes y entonces:

$$\overset{\rightarrow}{\mathbf{y}} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{c}} \overset{\rightarrow}{\mathbf{x}} = \mathfrak{F} \overset{\rightarrow}{\mathbf{x}} = \left(\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}} \otimes \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}} \right) \overset{\rightarrow}{\mathbf{x}} = \left(\overset{\rightarrow}{\mathbf{b}} \cdot \overset{\rightarrow}{\mathbf{x}} \right) \overset{\rightarrow}{\mathbf{a}} \quad (0.44)$$

Concluimos entonces que el producto tensorial puede interpretarse como una aplicación lineal, ya que en cualquier base ortonormal ambas tienen la misma representación en coordenadas. Podemos generalizar, sin demostración, que todos los tensores, definidos como aquellas cantidades que verifican la propiedad de cambio de base de las Ecuaciones 0.39 o 0.40 se comportan como aplicaciones lineales.

Acotaremos finalmente que este tipo de tensores que hemos introducido, son los denominados *tensores de orden 2*. Dentro de este marco los vectores pueden interpretarse como tensores de orden 1 y los escalares como tensores de orden 0. Pueden, en general, definirse equivalentemente tensores de rango 3, cuyas representaciones en coordenadas sean matrices 3 x 3 x 3 y así sucesivamente. Pero en este curso no trabajaremos con cantidades tan complicadas.

0.3.c.iv) Propiedades adicionales del Producto Tensorial.

Volviendo a estudiar en particular el producto tensorial, y despreocupándonos por el momento de los tensores en general, este producto verifica algunas propiedades que las enumeramos aquí porque nos serán de utilidad posteriormente. Además de la propiedad de linealidad vista como aplicación (Ecuación 0.42) tenemos las siguientes propiedades de linealidad del mismo:

$$\left(\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}_1 + \overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}_2 \right) \otimes \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}} = \overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}_1 \otimes \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}} + \overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}_2 \otimes \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}} \quad (0.45)$$

$$\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}} \otimes \left(\overset{\rightarrow}{\mathbf{b}}_1 + \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}}_2 \right) = \overset{\rightarrow}{\mathbf{a}} \otimes \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}}_1 + \overset{\rightarrow}{\mathbf{a}} \otimes \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}}_2 \quad (0.46)$$

$$\vec{\mathbf{a}} \otimes (\gamma \vec{\mathbf{b}}) = (\gamma \vec{\mathbf{a}}) \otimes \vec{\mathbf{b}} = \gamma (\vec{\mathbf{a}} \otimes \vec{\mathbf{b}}) \quad (0.47)$$

0.4 – Sistemas de Vectores Aplicados.

Las operaciones anteriores definidas para vectores consideran a los mismos como vectores libres, es decir, alcanzan las tres coordenadas que lo definen para determinarlo completamente. Sin embargo, como veremos en más de una ocasión, los vectores con los que nosotros queremos trabajar actúan de alguna manera sobre un determinado punto; o, si se quiere en otras palabras, el punto de comienzo del vector es importante. Veamos algunos ejemplos que nos aparecerán repetidamente a lo largo del curso:

- 1) Sistemas de Partículas: Cuando tengamos un sistema de partículas moviéndose por el espacio, cada partícula se moverá con una velocidad diferente. La velocidad de cada una será un vector, y podemos pensar que ese vector comienza en cada instante en la partícula correspondiente.
- 2) Distribuciones de Fuerzas: Análogamente, en el sistema de partículas anterior, sobre cada partícula actuará una fuerza diferente y el punto de aplicación, o la partícula sobre la que la fuerza actúa será importante. Pensemos un momento, por ejemplo, en una calesita o una rueda que puede girar en torno a su centro, encontrándose el mismo fijo. Para hacerla girar empujándola, debemos empujar con una fuerza tangencial a su periferia. Si esa misma fuerza la aplicásemos en el centro no conseguiríamos ningún giro.
- 3) Distribuciones de Velocidades: Pensemos el ejemplo anterior de la calesita que gira en torno a su centro. El desplazamiento de cada punto en un intervalo de tiempo dependerá del giro de la misma. Cada punto se desplazará una determinada cantidad que dependerá de la posición del punto en cuestión; por ejemplo, de la distancia al centro de giro.

A lo largo del curso estudiaremos las particularidades de cada caso en detalle, sin embargo todos estos ejemplos tienen ciertas características comunes. Pensemos en el primer caso del sistema de partículas, que por ejemplo sea una galaxia con infinidad de estrellas. Si para describir el movimiento de la galaxia se deben dar los detalles del movimiento de cada una de sus estrellas, nos encontraremos frente a un problema imposible. De todas formas se puede estudiar el movimiento de la galaxia como un todo dando unos pocos parámetros; éstos son, su cantidad de movimiento o momento $\vec{\mathbf{p}}$ y el momento angular respecto a algún punto \mathbf{O} , $\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{O}}$. Aunque no nos describirán el movimiento del sistema completo, si nos dan mucha información.

Estudiaremos ahora las generalidades de los sistemas de vectores aplicados que nos permitirán reducir el número de cantidades necesarias en el estudio de los mismos.

0.4.a – Vectores Aplicados.

0.4.a.i) Definición de Vector Aplicado.

A diferencia de un vector libre, un vector aplicado tiene un punto de aplicación en el espacio. Por eso definimos un *vector aplicado*

como una pareja dada por un vector libre $\vec{\mathbf{a}}$ y un *punto de aplicación* del mismo en el espacio, \mathbf{A} . O sea, que un vector aplicado es la pareja $\left\{ \mathbf{A}, \vec{\mathbf{a}} \right\}$.

A la recta $\vec{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{a}}$, es decir, la recta que pasa por el punto \mathbf{A} y tiene la misma dirección

que el vector $\vec{\mathbf{a}}$, se le llama *recta de aplicación* o *recta de acción* del vector aplicado $\left\{ \mathbf{A}, \vec{\mathbf{a}} \right\}$.

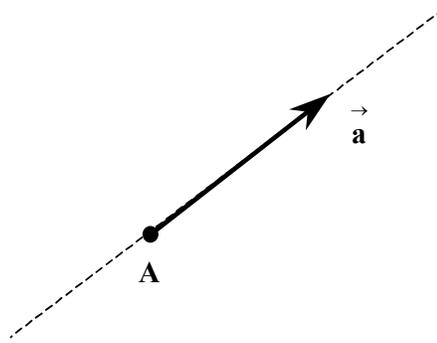


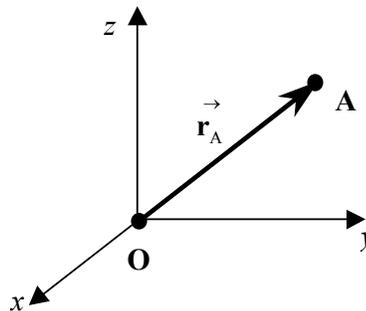
Figura 0.3

0.4.a.ii) Sistemas de Coordenadas como ejemplo de Vectores Aplicados.

Como \mathbf{A} es un punto del espacio, para determinarlo completamente debemos dar su posición, y para ello daremos sus coordenadas. En otras palabras, lo que estamos dando es un

vector libre $\vec{\mathbf{r}}_A$ que lo determina en el espacio. Pero en realidad, este vector está medido en un determinado sistema de coordenadas, para el que, como dijimos, se precisa un origen de coordenadas \mathbf{O} . Así que para determinar el punto \mathbf{A} precisamos de un vector aplicado $\left\{ \mathbf{O}, \vec{\mathbf{r}}_A \right\}$.

Por lo tanto, al referimos a un vector aplicado $\left\{ \mathbf{A}, \vec{\mathbf{a}} \right\}$ debemos dar dos vectores: $\vec{\mathbf{r}}_A$



y \vec{a} ; lo que es equivalente a dar seis coordenadas, tres del vector \vec{r}_A y tres del \vec{a} . En realidad lo que estamos dando es otro vector aplicado $\left\{O, \vec{r}_A\right\}$ y el vector libre \vec{a} . Obviamente que esto parecería una recurrencia infinita si no fuera que los puntos O y A tienen existencia en sí mismos, como los vectores; las coordenadas son solo una forma de determinar uno en relación a otro. O sea, podemos introducir el concepto de *diferencia* de puntos, cuyo resultado es un vector, de forma que, como se muestra en la Figura 0.4:

$$\vec{r}_A = A - O \quad (0.48)$$

Tratando de generalizar esta relación para dos puntos cualesquiera A y B , como muestra la Figura 0.5, diremos que:

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (B - O) - (A - O) = B - A \quad (0.49)$$

En esta ecuación estamos introduciendo y compatibilizando diferentes notaciones con que podemos referirnos a un mismo vector. Pero hacemos notar que podemos decir que formalmente el punto O está siendo simplificado en la última igualdad de esa ecuación.

Si re-escribimos la Ecuación 0.48 considerando O como un punto general:

$$\vec{r}_A = A - O = \vec{r}_A - \vec{r}_O$$

por lo tanto:

$$(0.50)$$

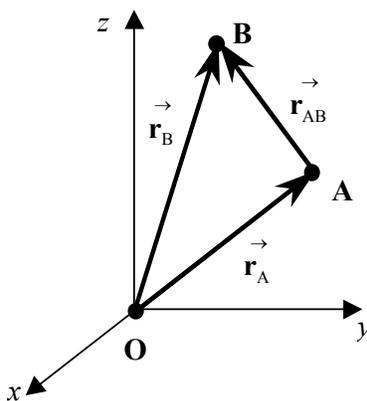


Figura 0.5

$$\vec{r}_O = 0$$

lo que es lógico con que al origen de coordenadas le

corresponde el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La notación introducida en la Ecuación 0.49, nos permite definir *formalmente* también la

$$(0.51)$$

suma de un punto y un vector. De la primer igualdad de dicha ecuación se deduce que:

$$\vec{\mathbf{r}}_B = \vec{\mathbf{r}}_A + \vec{\mathbf{r}}_{AB}$$

lo que, usando la notación introducida en la Ecuación 0.48 nos permite escribir:

$$\mathbf{B} - \mathbf{O} = (\mathbf{A} - \mathbf{O}) + \vec{\mathbf{r}}_{AB} \quad (0.52)$$

y simplificando formalmente el origen de coordenadas \mathbf{O} tendremos que:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \vec{\mathbf{r}}_{AB} \quad (0.53)$$

lo que formalmente sería la definición de sumar puntos y vectores.

0.4.a.iii) Momento de un Vector Aplicado.

Llamamos *momento* de un vector aplicado $\left\{ \mathbf{A}, \vec{\mathbf{a}} \right\}$ respecto a un determinado punto \mathbf{P} ,

al vector:

$$\vec{\mathbf{m}}_P = (\mathbf{A} - \mathbf{P}) \times \vec{\mathbf{a}} = \left(\vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{r}}_P \right) \times \vec{\mathbf{a}} \quad (0.54)$$

Utilizamos los dos tipos de notación introducida anteriormente porque la primera es independiente del sistema de coordenadas. Vemos, a través de la primera igualdad, que el momento de un vector no depende del sistema de coordenadas en uso; aunque, obviamente, la expresión del mismo dependerá de la base que se esté considerando, por tratarse de un vector libre.

La pareja $\left\{ \mathbf{P}, \vec{\mathbf{m}}_P \right\}$ se puede considerar como un nuevo vector aplicado.

0.4.a.iv) Cálculo de Momentos.

Como vemos de esta definición el momento $\vec{\mathbf{m}}_P$ de un vector aplicado $\left\{ \mathbf{A}, \vec{\mathbf{a}} \right\}$ es un pseudovector, porque está definido a través de un producto vectorial. Como tal, será perpendicular al vector en cuestión $\vec{\mathbf{a}}$ y a la recta que une el punto de aplicación del mismo con el punto en que se calcula el momento. Por lo tanto será perpendicular al plano definido por la recta de aplicación

del vector $\vec{A} \vec{a}$ y el punto P en que se calcula el mismo. El sentido del momento estará dado aplicando la regla de la mano derecha entre los vectores \vec{r}_{PA} y \vec{a} , como indica la Figura 0.6.

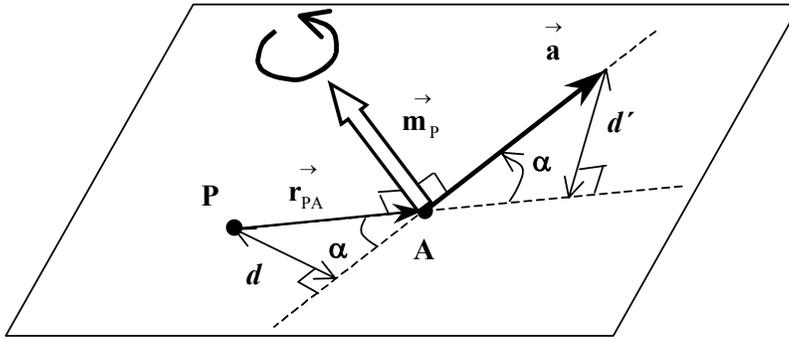


Figura 0.6

Su módulo será:

$$\left| \vec{m}_P \right| = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{r}_{PA} \right| \operatorname{sen} \alpha = \left| \vec{a} \right| d \quad (0.55)$$

donde α es el ángulo entre el vector \vec{a} y \vec{r}_{PA} (es decir, entre la recta de acción del vector aplicado $\vec{A} \vec{a}$ y la recta PA) y

$$d = \left| \vec{r}_{PA} \right| \operatorname{sen} \alpha \quad (0.56)$$

es la distancia del punto P a la recta de acción $\vec{A} \vec{a}$. Alternativamente también se puede decir que:

$$\left| \vec{m}_P \right| = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{r}_{PA} \right| \operatorname{sen} \alpha = \left| \vec{r}_{PA} \right| d' \quad (0.57)$$

donde ahora

$$d' = \left| \vec{a} \right| \operatorname{sen} \alpha \quad (0.58)$$

es la proyección del vector $\vec{\mathbf{a}}$ según la dirección *perpendicular* a la recta PA.

Cualesquiera de estas dos formas de cálculo del momento de un vector son de gran utilidad cuando calculemos momentos en configuraciones sencillas, como por ejemplo, problemas *planos*. En este tipo de problemas todos los vectores de interés están contenidos en un plano, que es el mismo en que se encuentran los puntos de aplicación y puntos de cálculo de momentos. Se le llaman problemas planos porque alcanza con trabajar con dos coordenadas solamente para tener una descripción completa del problema. Dependerá del caso particular cuál de las dos relaciones usar, si la Ecuación 0.55 o la 0.57. En el caso de momentos en el espacio, es decir, cuando se presente una geometría más general en que las tres direcciones independientes del espacio son importantes, es más conveniente hacer uso de la propia definición de momento Ecuación 0.54, y calcular el producto vectorial allí involucrado en forma general.

0.4.a.v) Cambio de Punto de Aplicación: Vectores Deslizantes.

Consideremos ahora dos vectores aplicados diferentes, a los que llamaremos $V^{(1)}$ y $V^{(2)}$:

$$V^{(1)} = \left\{ \mathbf{A}, \vec{\mathbf{a}} \right\} \text{ y } V^{(2)} = \left\{ \mathbf{B}, \vec{\mathbf{a}} \right\},$$

es decir, que se trata del mismo vector libre $\vec{\mathbf{a}}$ pero aplicado en puntos diferentes A y B. Los momentos de uno y otro vector respecto a un punto P arbitrario serán respectivamente:

$$\vec{\mathbf{m}}_P^{(1)} = \left(\vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{r}}_P \right) \times \vec{\mathbf{a}}$$

$$\vec{\mathbf{m}}_P^{(2)} = \left(\vec{\mathbf{r}}_B - \vec{\mathbf{r}}_P \right) \times \vec{\mathbf{a}}$$

La diferencia entre ellos será:

$$\vec{\mathbf{m}}_P^{(2)} - \vec{\mathbf{m}}_P^{(1)} = \left(\vec{\mathbf{r}}_B - \vec{\mathbf{r}}_A \right) \times \vec{\mathbf{a}} \quad (0.59)$$

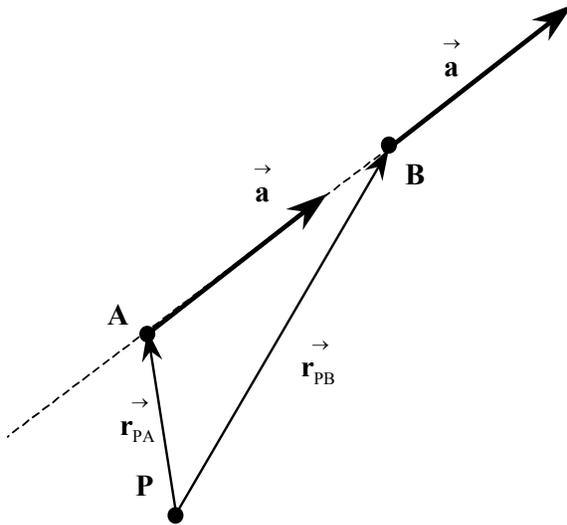


Figura 0.7

Estudiaremos que ocurre cuando la recta de aplicación de los vectores coincide; es decir, B se encuentra sobre la recta $A \vec{a}$, que coincidirá en ese caso con la $B \vec{a}$ (ver Figura 0.7). Entonces $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ será paralelo a \vec{a} y el segundo miembro de la Ecuación 0.59 será nulo, por lo que ambos momentos serán iguales:

$$\vec{m}_P^{(2)} = \vec{m}_P^{(1)} \quad (0.60)$$

Observar que este es el único caso en que esto es posible; o sea, si B no estuviese sobre la recta de acción de A entonces ese

término $(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{a}$ sería no nulo y los momentos serían diferentes.⁵

Como conclusión vemos que podemos desplazar el punto de aplicación de un vector aplicado sobre su recta de acción y el momento del mismo respecto a cualquier punto arbitrario del espacio no cambia. Por eso a un vector aplicado se le llama también *vector deslizante*, porque el mismo se desliza a través de su recta de acción.

0.4.a.vi) Cambio de Momentos respecto a su Punto de Aplicación.

⁵ - Hay dos casos singulares en que el segundo término de la Ecuación 0.59 es nulo que son:

- 1) cuando ambos puntos A y B coinciden; entonces, a pesar de que es un caso particular del caso general mencionado, los momentos serán iguales porque se trata de exactamente el mismo vector aplicado.
- 2) si $\vec{a} = 0$, pero acá tenemos la particularidad de que la recta de aplicación no está definida, y en realidad se podría decir que se trata de todo el espacio. En este caso, los momentos en todos los puntos del espacio serán nulos, por lo que es un caso particular de un vector aplicado idénticamente nulo.

Vemos, de la definición de momentos, Ecuación 0.54, que en principio, el momento $\vec{\mathbf{m}}_P$ depende, además del vector en cuestión, $\vec{\mathbf{a}}$, y del punto de aplicación del mismo, \mathbf{A} , de otro punto, en este caso \mathbf{P} , que es un punto cualquiera respecto del cual se calcula el momento.

Es decir, por su definición, el momento $\vec{\mathbf{m}}_P$ es el momento del vector aplicado $\left\{ \mathbf{A}, \vec{\mathbf{a}} \right\}$ respecto al punto \mathbf{P} . La importancia de este punto es tal que todos los momentos suelen escribirse de forma que el punto respecto al que se calcula aparece como subíndice. O sea, $\vec{\mathbf{m}}_P$ puede considerarse como una notación resumida que hace referencia al hecho de que el momento es en sí un vector aplicado $\left\{ \mathbf{P}, \vec{\mathbf{m}}_P \right\}$. En muchas de las operaciones que nos interesa hacer con vectores aplicados, y por lo general cuando se trate de momentos, para poder realizar las mismas dichos vectores deben estar aplicados en el mismo punto. Es decir, cuando sumemos momentos de diferentes vectores, los momentos que sumemos deben encontrarse calculados respecto a un mismo punto. Por esto es de interés estudiar como cambia el momento de un vector aplicado si cambiamos el punto respecto al cual el mismo se calcula.

Si deseamos calcular el momento en otro punto \mathbf{Q} , entonces tendremos:

$$\vec{\mathbf{m}}_Q = \left(\vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{a}} = \left(\left(\vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{r}}_P \right) + \left(\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \right) \times \vec{\mathbf{a}} = \left(\vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{r}}_P \right) \times \vec{\mathbf{a}} + \left(\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{a}}$$

y usando la propia definición de $\vec{\mathbf{m}}_P$ (Ecuación 0.54):

$$\vec{\mathbf{m}}_Q = \vec{\mathbf{m}}_P + \left(\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{a}} \quad (0.61)$$

Esta ecuación nos da el momento del vector aplicado $\left\{ \mathbf{A}, \vec{\mathbf{a}} \right\}$ en el punto \mathbf{Q} calculado a partir del momento en el punto \mathbf{P} , donde obviamente \mathbf{P} y \mathbf{Q} son dos puntos arbitrarios.

Puede ser conveniente usar la propiedad de que el producto vectorial es *anticonmutativo*:

$$\left(\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{a}} = -\vec{\mathbf{a}} \times \left(\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) = \vec{\mathbf{a}} \times \left(\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P \right) \quad (0.62)$$

y entonces la Ecuación 0.61 queda:

$$\vec{\mathbf{m}}_Q = \vec{\mathbf{m}}_P + \vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P) \quad (0.63)$$

Ambas ecuaciones 0.61 y 0.63 son completamente equivalentes; sin embargo, esta segunda puede ser más fácil de memorizar, ya que en ella, utilizando esta notación para los

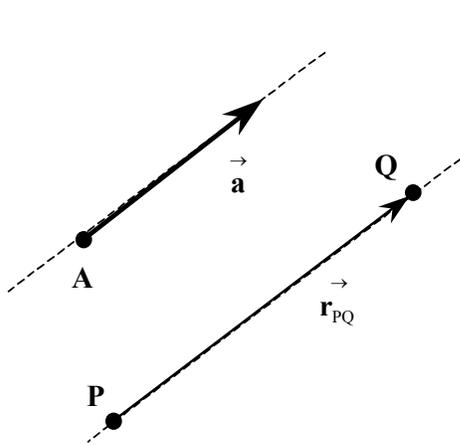


Figura 0.8

vectores posición $\vec{\mathbf{r}}_Q, \vec{\mathbf{r}}_P$ el orden de los puntos Q y P es el mismo, tanto en el subíndice de los momentos $\vec{\mathbf{m}}$, como en el de los vectores $\vec{\mathbf{r}}$ posición de dichos puntos.⁶

Observemos que, en el caso que se muestra en la Figura 0.8, en que el vector $\vec{\mathbf{r}}_{PQ} = \vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P$ sea paralelo a $\vec{\mathbf{a}}$, entonces el producto vectorial

$$\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P) = 0 \quad (0.64)$$

y los momentos en P y Q son iguales:

$$\vec{\mathbf{m}}_Q = \vec{\mathbf{m}}_P \quad (0.65)$$

O sea que si yo traslado el punto P de cálculo del momento de un vector aplicado $\{A, \vec{\mathbf{a}}\}$ sobre una recta $P \vec{\mathbf{a}}$ paralela al mismo, el momento no cambia.

0.4.a.vii) Momento respecto a un eje.

⁶ - Observar que si cambiamos de notación y usamos $\vec{\mathbf{r}}_{PQ} = \vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P$ el orden se mantendrá en la Ecuación 0.61, ya que hay una inversión en el orden de los puntos.

Llamaremos momento de un vector aplicado $\{A, \vec{a}\}$ respecto a una recta $P\vec{u}$ definida por un punto P y un versor \vec{u} , como muestra la Figura 0.9, a la cantidad *escalar* $m_{P\vec{u}}^{\vec{a}}$ definida como:

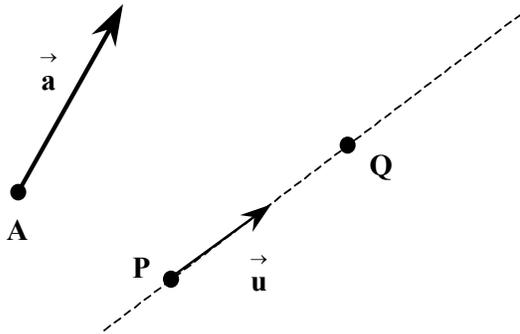


Figura 0.9

$$m_{P\vec{u}}^{\vec{a}} = \vec{u} \cdot \vec{m}_P \quad (0.66)$$

donde \vec{m}_P es el momento del vector $\{A, \vec{a}\}$ respecto al punto P.

A diferencia del momento *vector* definido anteriormente, esta cantidad es un *escalar*, y en su definición están involucrados, no solo el punto P arbitrario, sino

también un versor \vec{u} . Resaltamos el hecho de que sea un versor, es decir $\vec{u}^2 = 1$, porque si esto no fuese así la definición carecería de sentido.

Sin embargo, la definición anterior no depende del punto P que se considere sino solamente de la recta $P\vec{u}$. Efectivamente, consideremos otro punto Q cualquiera de la misma recta, como muestra la Figura 0.9. Aplicando la definición anterior sobre este nuevo punto, y la fórmula de cambio de momentos, Ecuación 0.63:

$$m_{Q\vec{u}}^{\vec{a}} = \vec{u} \cdot \vec{m}_Q = \vec{u} \cdot \left(\vec{m}_P + \vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \right) = \vec{u} \cdot \vec{m}_P + \vec{u} \cdot \left(\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \right)$$

donde, por estar el punto sobre la misma recta:

$$\vec{r}_Q - \vec{r}_P = \vec{r}_{PQ} = \left| \vec{r}_{PQ} \right| \vec{u} \quad (0.67)$$

es decir que $\vec{r}_Q - \vec{r}_P$ y \vec{u} son paralelos. El producto vectorial $\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_P)$ es perpendicular a \vec{u} , por lo que el producto mixto

$$\vec{u} \cdot \left(\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \right) = 0 \quad (0.68)$$

de donde resulta que:

$$m_{Q\vec{u}} = \vec{u} \cdot \vec{m}_Q = \vec{u} \cdot \vec{m}_P = m_{P\vec{u}} \quad (0.69)$$

A la recta $P\vec{u}$ respecto a la que se calcula este momento escalar se le suele llamar *eje*. La razón de esto es que, como veremos en el curso, esta definición tiene mucha importancia cuando se estudian el movimiento de giro de algún cuerpo respecto a un eje de rotación.

0.4.b – Sistemas de Vectores Aplicados.

En la sección anterior se definió y estudiaron algunas propiedades de un único vector aplicado $\left\{ A, \vec{a} \right\}$. Muchas veces en este curso nos aparecerán vectores de este tipo pero

agrupados; es decir, tendremos un conjunto de n vectores \vec{a}_i , con i variando desde 1 a n , cada uno de ellos aplicado en un punto A_i en principio diferente. Esto es lo que llamaremos un *Sistema de Vectores Aplicados*. Los 3 ejemplos dados al comienzo de la Sección 0.4 son todos casos de este tipo de sistemas que involucran varios vectores y no solamente uno. Estudiaremos ahora las propiedades de este tipo de sistemas.

0.4.b.i) Resultante y Momento de un Sistema de Vectores Aplicados.

Si tenemos un sistema de vectores aplicados $\left\{ A_i, \vec{a}_i \right\}$ con $i = 1, \dots, n$, definiremos las siguientes cantidades:

- La *resultante* es la suma vectorial de los vectores \vec{a}_i , o sea:

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{a}}_i \quad (0.70)$$

- El *momento* del sistema de vectores respecto a un punto \mathbf{P} como la suma de los momentos individuales de cada vector aplicado del sistema respecto a dicho punto:

$$\vec{\mathbf{M}}_P = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{m}}_{iP} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}_i - \mathbf{P}) \times \vec{\mathbf{a}}_i = \sum_{i=1}^n \left(\vec{\mathbf{r}}_{A_i} - \vec{\mathbf{r}}_P \right) \times \vec{\mathbf{a}}_i \quad (0.71)$$

Estas cantidades así definidas son importantes por el hecho de que, si bien no seremos muy exhaustivos en la demostración de los detalles matemáticos, veremos que la resultante $\vec{\mathbf{R}}$ y el momento $\vec{\mathbf{M}}_P$ respecto a un determinado punto \mathbf{P} son los *únicos* parámetros o propiedades que nos interesan de cualquier sistema de vectores aplicados. Es decir, en cualquier aplicación en que nos aparezcan sistemas de vectores aplicados, las propiedades de los mismos vendrán completamente determinadas solamente por la pareja resultante $\vec{\mathbf{R}}$ y momento $\vec{\mathbf{M}}_P$, independientemente de cuál sea el conjunto de vectores aplicados particular de que se trate.

Por la propiedad anterior, la pareja $\left(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{M}}_P \right)$ es lo que se llama *coordenadas* del sistema de vectores respecto al punto \mathbf{P} . Observar que en esta definición de *coordenadas*, que es simplemente una denominación que se le da a esta pareja, nos referimos a un par de vectores. Para determinarlos completamente, precisaremos de una pareja de tres coordenadas en una determinada base de versores independientes; o sea un total de 6 coordenadas o variables independientes que nos determinan las propiedades del sistema de vectores aplicados.

0.4.b.ii) Fórmula de Cambio de Momentos de un Sistema de Vectores Aplicados.

Debemos observar que en la definición anterior de coordenadas de un sistema de vectores aplicados, $\left\{ \vec{A}_i, \vec{a}_i \right\}$ con $i = 1, \dots, n$, respecto a un determinado punto P, que es relativa a dicho punto, solo uno de los vectores depende del punto. Mientras que el momento \vec{M}_P depende del mismo, por su definición, Ecuación 0.71, la resultante \vec{R} es independiente de este punto. Sin embargo, tan solo por \vec{M}_P depender del punto P, las coordenadas respecto a dos puntos diferentes P y Q serán diferentes. Demostraremos a continuación que dadas las coordenadas $\left(\vec{R}, \vec{M}_P \right)$ en el punto P, las coordenadas $\left(\vec{R}, \vec{M}_Q \right)$ respecto a cualquier otro punto Q estarán completamente determinadas, independientemente de los vectores aplicados particulares.

De la definición de \vec{R} es inmediato que no depende del punto, como dicho anteriormente, por lo que lo único que precisamos es demostrar que el momento \vec{M}_Q puede determinarse completamente dadas las coordenadas en el punto P: $\left(\vec{R}, \vec{M}_P \right)$. Por definición:

$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^n \vec{m}_{iQ} = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_{A_i} - \vec{r}_Q \right) \times \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_{A_i} - \vec{r}_P + \vec{r}_P - \vec{r}_Q \right) \times \vec{a}_i$$

Aquí en la última igualdad se sumó y restó el vector \vec{r}_P lo que da lugar a:

$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_{A_i} - \vec{r}_P \right) \times \vec{a}_i + \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_P - \vec{r}_Q \right) \times \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_{A_i} - \vec{r}_P \right) \times \vec{a}_i + \left(\vec{r}_P - \vec{r}_Q \right) \times \sum_{i=1}^n \vec{a}_i$$

donde el vector $\left(\vec{r}_P - \vec{r}_Q \right)$ no depende del punto de aplicación de los vectores por lo que puede ponerse como factor común de todos los términos de la segunda de las dos sumatorias. Comparándolas con las ecuaciones 0.70 y 0.71 tenemos:

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_P + \left(\vec{r}_P - \vec{r}_Q \right) \times \vec{R} \quad (0.72)$$

lo que es la denominada Fórmula de Cambio de Momentos, porque nos da el momento en un punto $\vec{\mathbf{M}}_Q$ en función de la resultante $\vec{\mathbf{R}}$ y el momento en otro $\vec{\mathbf{M}}_P$; es decir, que dadas las coordenadas $\left(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{M}}_P\right)$ en un punto P, las coordenadas $\left(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{M}}_Q\right)$ respecto a otro punto Q están automáticamente determinadas.

Esta ecuación es muy similar a la 0.61, que nos daba el momento respecto a un punto de un único vector aplicado en función del momento en otro punto y el propio vector, por lo que procediendo como entonces podemos escribir:

$$\boxed{\vec{\mathbf{M}}_Q = \vec{\mathbf{M}}_P + \vec{\mathbf{R}} \times \left(\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P\right)} \quad (0.73)$$

0.4.b.iii) Campos Vectoriales y Campo de Momentos.

La fórmula de cambio de momentos permite interpretar los momentos de un determinado sistema de vectores aplicados como un *campo vectorial*. Un campo vectorial es, por definición, cualquier función que a cada punto del espacio le hace corresponder un vector. O sea, dado un punto P cualquiera, un campo vectorial asocia a dicho punto un vector que podemos llamar $\vec{\mathbf{c}}(P)$. Dado un sistema de coordenadas para el espacio, un campo vectorial puede verse como una función de $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$: $\vec{\mathbf{c}}(P) = \vec{\mathbf{c}}\left(\vec{\mathbf{r}}_P\right)$.

Por ejemplo, el producto tensorial definido en la sección 0.3.c.iii a través de la Ecuación 0.41 es un caso de campo vectorial, donde $\vec{\mathbf{y}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right)$ es un campo vectorial con $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ parámetros de dicha función. En general todo tensor y todas las aplicaciones lineales pueden verse como campos vectoriales. El recíproco no es cierto, ya que un campo vectorial cualquiera no tiene por qué ser lineal.

Un ejemplo de campo vectorial *no lineal*, que aparecerá muy seguido en el Capítulo 4 cuando estudiemos Movimiento Planetario, es la fuerza de atracción gravitatoria que existe entre dos cuerpos cualesquiera con masa. Dicha fuerza puede verse como un campo vectorial que asocia a un vector $\vec{\mathbf{r}}$, posición relativa entre los dos cuerpos, otro vector $\vec{\mathbf{F}}$, que es la fuerza de interacción entre ambos a través de la expresión:

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = -GMm \frac{\vec{\mathbf{r}}}{\left(\vec{\mathbf{r}}^2\right)^{3/2}} = -GMm \frac{\vec{\mathbf{r}}}{|\vec{\mathbf{r}}|^3} \quad (0.74)$$

donde M y m son las masas de los cuerpos considerados y G es una constante universal. El signo de menos es debido a que la fuerza entre los cuerpos es atractiva⁷. Como se puede ver, efectivamente se trata de una función que asocia un vector a otro vector.

De la misma manera, la fórmula de cambio de momentos asocia el momento $\vec{\mathbf{M}}_Q$ a cualquier punto Q del espacio, de coordenadas $\vec{\mathbf{r}}_Q$, donde $\vec{\mathbf{M}}_P$, $\vec{\mathbf{R}}$ y $\vec{\mathbf{r}}_P$ son parámetros de dicha función, como lo eran los vectores $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ en la definición de producto tensorial. Al campo vectorial que surge de dichas ecuaciones 0.72 y 0.73 se le llama *campo de momentos*.

0.4.b.iv) Sistemas de Vectores Aplicados Equivalentes.

Consideremos dos sistemas de vectores aplicados diferentes: $S^{(1)} = \left\{ A_i, \vec{\mathbf{a}}_i \right\}$ con $i = 1, \dots, n$, y $S^{(2)} = \left\{ B_j, \vec{\mathbf{b}}_j \right\}$ con $j = 1, \dots, m$, que tengan las mismas coordenadas $\left(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{M}}_P \right)$, es decir, la misma resultante $\vec{\mathbf{R}}$ y el mismo momento $\vec{\mathbf{M}}_P$ respecto a un mismo punto P , en principio arbitrario, o sea:

$$\vec{\mathbf{R}}^{(1)} = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{a}}_i = \sum_{j=1}^m \vec{\mathbf{b}}_j = \vec{\mathbf{R}}^{(2)} \quad (0.75)$$

$$\vec{\mathbf{M}}_P^{(1)} = \sum_{i=1}^n (A_i - P) \times \vec{\mathbf{a}}_i = \sum_{j=1}^m (B_j - P) \times \vec{\mathbf{b}}_j = \vec{\mathbf{M}}_P^{(2)} \quad (0.76)$$

⁷ - Para que el signo sea relevante, el vector $\vec{\mathbf{r}}$ debe ser definido con un poco más de cuidado. No entraremos en este detalle por el momento.

En dichas condiciones los sistemas $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$ serán completamente equivalentes y en todas nuestras aplicaciones veremos que podremos sustituir uno por el otro sin inconvenientes.

Acotemos que en la definición anterior hablamos de las coordenadas $\left(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{M}}_p\right)$ respecto a un punto P, la fórmula de cambio de momentos, Ecuación 0.73 nos dice que también tendrán las mismas coordenadas respecto a cualquier otro punto Q: ⁸

$$\vec{\mathbf{M}}_Q^{(1)} = \vec{\mathbf{M}}_P^{(1)} + \mathbf{R} \times \left(\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P\right) = \vec{\mathbf{M}}_P^{(2)} + \mathbf{R} \times \left(\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P\right) = \vec{\mathbf{M}}_Q^{(2)} \quad (0.77)$$

0.4.b.v) Suma de Sistemas de Vectores Aplicados.

Consideremos dos sistemas de vectores aplicados $S^{(1)} = \left\{ \mathbf{A}_i, \vec{\mathbf{a}}_i \right\}$, con $i = 1, \dots, n$, de coordenadas $\left(\vec{\mathbf{R}}^{(1)}, \vec{\mathbf{M}}_P^{(1)}\right)$ respecto a un punto P, y $S^{(2)} = \left\{ \mathbf{A}_{j+n}, \vec{\mathbf{a}}_{j+n} \right\}$ con $j = 1, \dots, m$, de coordenadas $\left(\vec{\mathbf{R}}^{(2)}, \vec{\mathbf{M}}_P^{(2)}\right)$ respecto al mismo punto P. Formemos el sistema *unión* de ambos, al que llamaremos sistema *suma*, que sale de agrupar los dos anteriores: $S^{(suma)} = \left\{ \mathbf{A}_k, \vec{\mathbf{a}}_k \right\}$ con $k = 1, \dots, n + m$. Las coordenadas de este último, aplicando las definiciones, vendrán dadas por:

$$\vec{\mathbf{R}}^{(suma)} = \vec{\mathbf{R}}^{(1)} + \vec{\mathbf{R}}^{(2)} \quad (0.78)$$

y:

$$\vec{\mathbf{M}}_P^{(suma)} = \vec{\mathbf{M}}_P^{(1)} + \vec{\mathbf{M}}_P^{(2)} \quad (0.79)$$

es decir, la resultante y momento del sistema *unión* son las sumas de las resultantes y momentos originales, es por esta razón que al mismo se le llama sistema *suma*; o sea, porque podemos asumir que $S^{(suma)} = S^{(1)} + S^{(2)}$.

⁸ - La resultante es la misma por la Ecuación 0.75.

Estas propiedades son casi inmediatas debido a las sumatorias involucradas en las definiciones, ecuaciones 0.70 y 0.71, pero haremos la demostración a continuación. De la propia definición de resultante tendremos:

$$\vec{\mathbf{R}}^{(1)} = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{a}}_i \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{R}}^{(2)} = \sum_{j=1}^m \vec{\mathbf{a}}_{j+n} \quad (0.80)$$

mientras que:

$$\vec{\mathbf{R}}^{(\text{suma})} = \sum_{k=1}^{n+m} \vec{\mathbf{a}}_k = \sum_{k=1}^n \vec{\mathbf{a}}_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} \vec{\mathbf{a}}_k \quad (0.81)$$

en donde solamente se ha separado la sumatoria en dos. Si cambiamos, en la primer sumatoria, el subíndice k por el subíndice i , mientras que hacemos el cambio de variable $j = k - n$ en la segunda, se llega a:

$$\vec{\mathbf{R}}^{(\text{suma})} = \sum_{k=1}^n \vec{\mathbf{a}}_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} \vec{\mathbf{a}}_k = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{a}}_i + \sum_{j=1}^m \vec{\mathbf{a}}_{j+n} = \vec{\mathbf{R}}^{(1)} + \vec{\mathbf{R}}^{(2)} \quad (0.82)$$

que es lo que queríamos demostrar (Ecuación 0.78).

Análogamente se puede demostrar para los momentos:

$$\vec{\mathbf{M}}_P^{(1)} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}_i - \mathbf{P}) \times \vec{\mathbf{a}}_i \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{M}}_P^{(2)} = \sum_{j=1}^m (\mathbf{A}_{j+n} - \mathbf{P}) \times \vec{\mathbf{a}}_{j+n} \quad (0.83)$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{M}}_P^{(\text{suma})} &= \sum_{k=1}^{n+m} (\mathbf{A}_k - \mathbf{P}) \times \vec{\mathbf{a}}_k = \sum_{k=1}^n (\mathbf{A}_k - \mathbf{P}) \times \vec{\mathbf{a}}_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} (\mathbf{A}_k - \mathbf{P}) \times \vec{\mathbf{a}}_k = \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}_i - \mathbf{P}) \times \vec{\mathbf{a}}_i + \sum_{j=1}^m (\mathbf{A}_{j+n} - \mathbf{P}) \times \vec{\mathbf{a}}_{j+n} = \vec{\mathbf{M}}_P^{(1)} + \vec{\mathbf{M}}_P^{(2)} \end{aligned} \quad (0.84)$$

0.4.b.vi) Casos Importantes de Sistemas de Vectores Aplicados.

A continuación enumeraremos algunos ejemplos de sistemas de vectores aplicados, los cuales aparecerán frecuentemente a lo largo del curso:

- *Vector Deslizante:* Es un sistema constituido por un único vector aplicado

$$S^{(1)} = \left\{ A, \vec{a} \right\}. \text{ En este caso tendremos que:}$$

$$\vec{R} = \vec{a} \quad (0.85)$$

$$\vec{M}_p = (A - P) \times \vec{a} \quad (0.86)$$

Por lo visto en la Sección 0.4.a.v, los sistemas $S^{(1)} = \left\{ A, \vec{a} \right\}$ y $S^{(2)} = \left\{ B, \vec{a} \right\}$

de la Figura 0.7 son equivalentes.

- *Sistema Par o Par de Vectores:*⁹ Es un sistema constituido por dos vectores iguales y opuestos aplicados en puntos diferentes, siempre que la recta que los une no sea colineal con la dirección del vector. O sea:

$$S^{(1)} = \left\{ \left(A, \vec{a} \right), \left(B, -\vec{a} \right) \right\}, \text{ con}$$

$$\vec{r}_{AB} \times \vec{a} \neq 0.$$

La principal característica de este sistema es que su resultante es nula:

$$\vec{R} = \vec{a} - \vec{a} = 0 \quad (0.87)$$

Entonces, por la fórmula de cambio de momentos, Ecuación 0.73, el momento respecto a dos puntos cualesquiera P y Q, será igual. O sea,

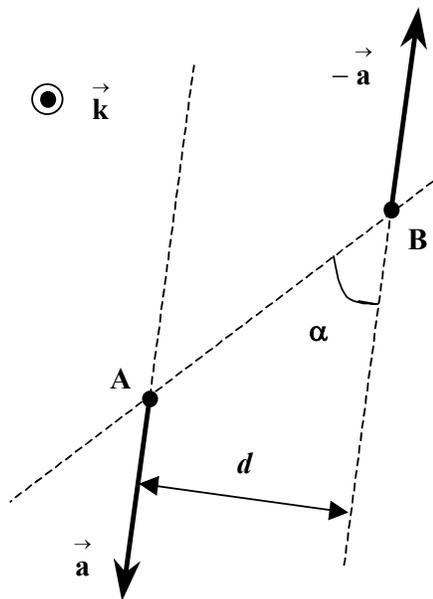


Figura 0.10

⁹ - Siempre que hablemos de un *par* nos estaremos refiriendo a un sistema de este tipo.

podemos escribir que:

$$\vec{\mathbf{M}}_p = \vec{\mathbf{M}} \quad (0.88)$$

Notar que entonces las coordenadas de un par respecto a cualquier punto serán $(0, \vec{\mathbf{M}})$. Solamente importarán las componentes del momento de este sistema, las cuales a su vez son independientes del punto. Este es entonces un sistema de vectores que representa un momento solamente; si a un determinado sistema de vectores le agregamos un par, solo estaremos alterando el momento del mismo, pero su resultante permanecerá inalterada.

Dado que el momento será independiente del punto, calculemoslo en alguno de los puntos de aplicación de los dos vectores del sistema, por ejemplo el punto A (ver Figura 0.10):

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{M}}_A = (\vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{r}}_A) \times \vec{\mathbf{a}} + (\vec{\mathbf{r}}_B - \vec{\mathbf{r}}_A) \times (-\vec{\mathbf{a}})$$

En esta ecuación el momento del primer vector será nulo, porque el vector $\vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{r}}_A = 0$, por lo que tendremos que:

$$\vec{\mathbf{M}} = \left| \vec{\mathbf{r}}_{AB} \right| \left| \vec{\mathbf{a}} \right| \sin \alpha \vec{\mathbf{k}} = \left| \vec{\mathbf{a}} \right| d \vec{\mathbf{k}} \quad (0.89)$$

siendo α el ángulo entre la recta AB y las rectas de acción de los vectores ($A \vec{\mathbf{a}}$ y $B \vec{\mathbf{a}}$, respectivamente), el vector $\vec{\mathbf{k}}$ un versor en la dirección perpendicular al plano de la Figura 0.10, y $d = \left| \vec{\mathbf{r}}_{AB} \right| \sin \alpha$ la distancia entre las rectas $A \vec{\mathbf{a}}$ y $B \vec{\mathbf{a}}$.

Observemos entonces que si acercamos las rectas aumentando el módulo de los vectores, de forma que el producto $\left| \vec{\mathbf{M}} \right| = \left| \vec{\mathbf{a}} \right| d$ sea constante, tendremos un sistema de vectores aplicados equivalente. O sea, el sistema de vectores anterior es equivalente a un sistema $S^{(2)} = \left\{ (A, \vec{\mathbf{b}}), (B', -\vec{\mathbf{b}}) \right\}$ siempre que mantengamos el producto

$\left| \vec{\mathbf{a}} \right| d = \left| \vec{\mathbf{b}} \right| d'$ donde $d' = \left| \vec{\mathbf{r}}_{AB'} \right| \text{sen } \alpha$ es la distancia entre las rectas de acción

A $\vec{\mathbf{b}}$ y $B' \vec{\mathbf{b}}$ de los vectores del sistema $S^{(2)}$.

- Sistemas Nulos Elementales: Decimos que un sistema de vectores aplicados es un *sistema nulo* cuando sus resultante y momento, en *todos* los puntos del espacio, son idénticamente nulos. A un sistema cualquiera de estos no le llamaremos *nulo elemental*, sino que, por definición, diremos que existen dos tipos de tales sistemas:

- 1) Vector deslizante nulo: Es un sistema constituido por n vectores, todos aplicados en el mismo punto, y tales que su suma sea nula; o sea:

$$S_0^{(1)} = \left\{ A, \vec{\mathbf{a}}_i \right\} \text{ con } i = 1, \dots, n, \text{ y tal que:}$$

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{a}}_i = 0 \tag{0.90}$$

Obviamente se verificará que:

$$\vec{\mathbf{M}}_P = \sum_{i=1}^n \left(\vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{r}}_P \right) \times \vec{\mathbf{a}}_i = \left(\vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{r}}_P \right) \times \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{a}}_i = 0 \tag{0.91}$$

para todo punto P del espacio.

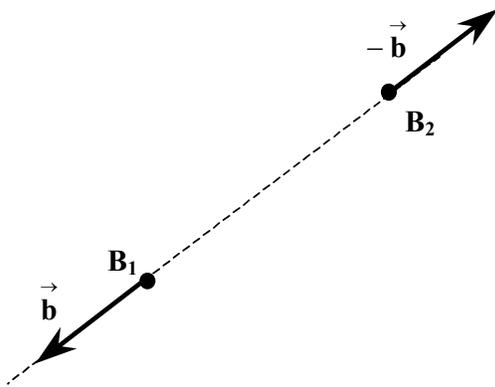


Figura 0.11

Este sistema es equivalente a un único vector $\vec{\mathbf{a}}_0 = 0$ aplicado en el punto A.

- 2) Par deslizante nulo: Es un par constituido por 2 vectores que tienen la misma dirección de la recta definida por sus puntos de aplicación; o sea:

$$S_0^{(2)} = \left\{ \left(B_1, \vec{\mathbf{b}} \right), \left(B_2, -\vec{\mathbf{b}} \right) \right\} \text{ y}$$

tal que el vector $B_1 - B_2$ es paralelo a $\vec{\mathbf{b}}$ (Ver Figura 0.11):

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{b}} = 0 \quad (0.92)$$

En este caso, por tratarse de un par el momento no depende del punto:

$$\vec{\mathbf{M}}_P = \vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{M}}_{B_1} = (B_1 - B_1) \times \vec{\mathbf{b}} + (B_2 - B_1) \times (-\vec{\mathbf{b}}) = 0 \quad (0.93)$$

donde la última igualdad se verifica porque el primer sumando involucra el vector nulo $(B_1 - B_1)$ y el segundo cumple que:

$$(B_2 - B_1) \times (-\vec{\mathbf{b}}) = (B_1 - B_2) \times \vec{\mathbf{b}} = 0 \quad (0.94)$$

por ser los vectores paralelos.

0.4.b.vii) Invariante Vectorial e Invariante Escalar.

Como vimos anteriormente, las coordenadas $(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{M}}_P)$ de un sistema de vectores aplicados cumplan la condición de que $\vec{\mathbf{R}}$ era independiente del punto P respecto al que las mismas estaban referidas. Por eso podemos decir que $\vec{\mathbf{R}}$ es un *invariante vectorial*, porque no cambia si cambiamos el punto al que hacemos referencia.

De la misma manera demostraremos ahora que existe otra cantidad, que no depende de dicho punto. Esta vez es un escalar, por eso lo denominaremos *invariante escalar* y está definido como el producto escalar de la resultante y el momento:

$$\mu = \vec{\mathbf{M}}_P \cdot \vec{\mathbf{R}} \quad (0.95)$$

Efectivamente, si lo calculamos en otro punto Q y hacemos referencia al anterior a través de la fórmula de cambio de momentos, Ecuación 0.73, tendremos:

$$\mu' = \vec{\mathbf{M}}_Q \cdot \vec{\mathbf{R}} = \left(\vec{\mathbf{M}}_P + \vec{\mathbf{R}} \times (\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P) \right) \cdot \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{M}}_P \cdot \vec{\mathbf{R}} + \left(\vec{\mathbf{R}} \times (\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P) \right) \cdot \vec{\mathbf{R}}$$

Como nuevamente el producto mixto:

$$\left(\vec{\mathbf{R}} \times \left(\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P \right) \right) \cdot \vec{\mathbf{R}} = 0 \quad (0.96)$$

tenemos que:

$$\mu' = \vec{\mathbf{M}}_Q \cdot \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{M}}_P \cdot \vec{\mathbf{R}} = \mu \quad (0.97)$$

0.4.b.viii) Propiedades Adicionales de los Sistemas de Vectores Aplicados.

A continuación enumeramos algunas propiedades generales de los sistemas de vectores aplicados. Muchas de ellas requieren de una demostración cuidadosa, mientras que otras son obvias tras las definiciones y conceptos expuestos anteriormente. Las mencionamos aquí porque pueden ser de gran ayuda al interpretar muchos de los resultados que obtendremos posteriormente, así como también facilitar el cálculo en las diversas aplicaciones y ejercicios que aparecerán durante el año.

- 1) Si a un sistema de vectores se le agrega un sistema de vectores nulo elemental, el nuevo sistema tendrá la misma resultante y momento que el original.
- 2) La condición necesaria y suficiente para que dos sistemas de vectores aplicados sean equivalentes es que tengan el mismo momento respecto a tres puntos no alineados.
- 3) Todo sistema de vectores es equivalente a uno constituido por dos únicos vectores, uno de ellos aplicado en un punto prefijado.
- 4) Todo sistema de vectores es equivalente a uno constituido por tres vectores aplicados en tres puntos no alineados prefijados.
- 5) La condición necesaria y suficiente para que un sistema de vectores aplicados sea equivalente a un vector deslizante o un par es que el invariante escalar sea nulo.
- 6) La condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial $\vec{\mathbf{c}}(\mathbf{P})$ sea un campo de momentos es que:

$$\left(\vec{\mathbf{c}}(\mathbf{P}) - \vec{\mathbf{c}}(\mathbf{Q}) \right) \cdot \left(\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) = 0 \quad (0.98)$$

0.4.c – Ejemplos de Sistemas de Vectores Aplicados.

A continuación volveremos con un poco más de detenimiento sobre las aplicaciones que daremos en este curso a los conceptos definidos y estudiados anteriormente en forma general para sistemas de vectores aplicados. Estudiaremos los tres ejemplos particulares mencionados al principio de la sección 0.4.

0.4.c.i) Cinética de un Sistema de Partículas.

En el Capítulo 5 de este curso estudiaremos en forma general los Sistemas de Partículas como generalización de los conceptos que introduciremos en la primer parte del curso que se aplican a una única partícula. Entendemos por *Sistemas de Partículas* a un conjunto de n puntos P_i , con $i = 1, \dots, n$, de coordenadas $\vec{r}_p = \vec{r}_i$ los cuales tienen masas m_i , y se mueven con velocidades \vec{v}_i . Independientemente de cuál sea el movimiento de estas partículas, y las variaciones que introduzcan estos movimientos en las posiciones P_i al avanzar el tiempo, por ahora deseamos estudiarlo como si el tiempo no anduviese; o sea, como si tuviésemos una fotografía de la posición de las partículas y la información adicional de cuál es la velocidad instantánea de cada una de ellas.

Definimos entonces la *Cantidad de Movimiento* de la i -ésima partícula como:

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \quad (0.99)$$

y consideraremos el sistema de estos vectores, cantidades de movimiento aplicados sobre la partícula correspondiente: $\left\{ \vec{P}_i, \vec{p}_i \right\}$ con $i = 1, \dots, n$. La resultante de este sistema de vectores aplicados es lo que llamamos la *Cantidad de Movimiento Total*; es decir, la del sistema de partículas considerado como un todo:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \quad (0.100)$$

Veremos en el Capítulo 5 que podemos definir un punto en particular, que denominaremos *Centro de Masas* o *Baricentro*, G , al que se le puede asignar toda la masa del sistema. Es decir, siendo

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \quad (0.101)$$

la masa total del sistema, se verifica que:

$$\vec{\mathbf{P}} = M \vec{\mathbf{v}}_G \quad (0.102)$$

donde $\vec{\mathbf{v}}_G$ es la velocidad del centro de masas.

Aplicando la definición, Ecuación 0.54, los momentos individuales de estos vectores aplicados, respecto a algún punto Q, serán:

$$\vec{\mathbf{l}}_{iQ} = (\mathbf{P}_i - \mathbf{Q}) \times \vec{\mathbf{p}}_i = \left(\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{p}}_i = m_i \left(\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{v}}_i \quad (0.103)$$

donde $\vec{\mathbf{l}}_{iQ}$ es, por definición, el Momento Angular de la partícula i respecto al punto Q.

Considerando en particular el momento angular respecto al origen de coordenadas, al que llamaremos para simplificar simplemente $\vec{\mathbf{l}}_i$, tendremos:

$$\vec{\mathbf{l}}_i = \vec{\mathbf{l}}_{iO} = (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \times \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{p}}_i = m_i \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{v}}_i \quad (0.104)$$

Es inmediato de su definición, Ecuación 0.103, que:

$$\vec{\mathbf{l}}_{iQ} = \vec{\mathbf{l}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q \times \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{l}}_i + \vec{\mathbf{p}}_i \times \vec{\mathbf{r}}_Q \quad (0.105)$$

lo que no es más que el cambio de punto de aplicación del momento, ecuaciones 0.61 y 0.63.

Para el *Momento Angular Total* del sistema de partículas respecto al punto Q tendremos:

$$\vec{\mathbf{L}}_Q = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{l}}_{iQ} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{P}_i - \mathbf{Q}) \times \vec{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n \left(\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \left(\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{v}}_i \quad (0.106)$$

y para cualquier otro punto S se cumplirá, por la fórmula de cambio de momentos:

$$\vec{\mathbf{L}}_S = \vec{\mathbf{L}}_Q + \vec{\mathbf{P}} \times \left(\vec{\mathbf{r}}_S - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) = \vec{\mathbf{L}}_Q + M \vec{\mathbf{v}}_G \times \left(\vec{\mathbf{r}}_S - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \quad (0.107)$$

Ejemplos:1) Partícula única:

En el caso que tengamos una única partícula A de masa m y velocidad \vec{v} , estaríamos frente al caso de un vector deslizante. La cantidad de movimiento total será:

$$\vec{P} = \vec{p} = m \vec{v} \quad (0.108)$$

y el momento angular respecto al origen:

$$\vec{I} = \vec{r}_A \times \vec{p} = m \vec{r}_A \times \vec{v} \quad (0.109)$$

El momento respecto a un punto P cualquiera será:

$$\vec{I}_P = \left(\vec{r}_A - \vec{r}_P \right) \times \vec{p} = m \left(\vec{r}_A - \vec{r}_P \right) \times \vec{v} \quad (0.110)$$

Por lo que hemos visto previamente de vectores deslizantes el momento angular $\vec{I}_Q = 0$ para todo punto Q que se encuentre en la recta de acción del vector deslizante, que en este caso será $A \vec{v}$.

2) Velocidades iguales y opuestas:

Consideremos un sistema formado por dos partículas P_1 y P_2 , de igual masa m y tal que se mueven con velocidades iguales y opuestas \vec{v} y $-\vec{v}$, respectivamente. Este sistema es similar a un par de vectores aplicados, por lo que tendremos:

$$\vec{p}_1 = m \vec{v} \quad (0.111)$$

$$\vec{p}_2 = m \left(-\vec{v} \right) = -m \vec{v} = -\vec{p}_1 \quad (0.112)$$

$$\vec{P} = \vec{p}_2 + \vec{p}_1 = 0 \quad (0.113)$$

Haciendo uso de la Ecuación 0.102 vemos que el baricentro de este sistema estará fijo:

$$\vec{\mathbf{v}}_G = \mathbf{0} \quad (0.114)$$

ya que la masa total del sistema es:

$$M = 2m \neq 0 \quad (0.115)$$

El momento angular será obviamente igual en todos los puntos del espacio y su módulo será:

$$l = \left| \vec{\mathbf{I}} \right| = m d \left| \vec{\mathbf{v}} \right| \quad (0.116)$$

siendo d la distancia entre las rectas de acción $P_1 \vec{\mathbf{v}}$ y $P_2 \vec{\mathbf{v}}$ de ambos vectores.

3) *Traslación de un Sistema de Partículas.*

Consideremos el caso general del sistema de n partículas en que todas ellas tengan la misma velocidad $\vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{v}}$. Esto es lo que se dice un sistema con movimiento de *traslación*, entonces de las ecuaciones 0.100 y 0.102:

$$\vec{\mathbf{P}} = M \vec{\mathbf{v}}_G = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\mathbf{v}} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{\mathbf{v}} = M \vec{\mathbf{v}}$$

o sea que la velocidad del baricentro será igual a la de todas las demás partículas del sistema:

$$\vec{\mathbf{v}}_G = \vec{\mathbf{v}} \quad (0.117)$$

El momento angular total respecto a un punto Q será:

$$\vec{\mathbf{L}}_Q = \sum_{i=1}^n \left(\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \left(\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{v}} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \left(\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \right) \times \vec{\mathbf{v}}$$

donde trabajando con la sumatoria del último miembro:

$$\sum_{i=1}^n m_i \left(\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\mathbf{r}}_i - \sum_{i=1}^n m_i \vec{\mathbf{r}}_Q = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\mathbf{r}}_i - \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{\mathbf{r}}_Q$$

que usando la definición de masa total del sistema, Ecuación 0.101:

$$\sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i - M \vec{r}_Q \quad (0.118)$$

por lo que:

$$\vec{L}_Q = \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i - M \vec{r}_Q \right) \times \vec{v} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{v} - M \vec{r}_Q \times \vec{v} \quad (0.119)$$

Pero volviendo a la Ecuación 0.118, vemos que existe un punto en que el momento angular es nulo ya que el segundo miembro de esta ecuación puede hacerse cero. Como veremos posteriormente este punto es precisamente el centro de masa del sistema, que por definición es aquel punto G de coordenadas:

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (0.120)$$

por lo que efectivamente, sustituyendo vemos que:

$$\vec{L}_G = 0 \quad (0.121)$$

Comparando entonces este caso de un sistema de partículas con movimiento de traslación con el de una única partícula, vemos que el primero es equivalente a una partícula ubicada en el baricentro G del sistema, de masa M (la masa del sistema total) y con velocidad \vec{v} (la misma del resto de todas las partículas).

Ambos sistemas tienen la misma cantidad de movimiento $\vec{P} = M \vec{v}$ y momento angular $\vec{L}_G = 0$. O sea, ambos sistemas de vectores aplicados son equivalentes.

0.4.c.ii) Distribuciones de Fuerzas.

Consideremos ahora el mismo sistema de partículas o puntos P_i pero ahora nos concentraremos no en las velocidades con que se mueven, sino en las fuerzas aplicadas sobre ellos. Llamémosle \vec{F}_i a una fuerza aplicada sobre la i -ésima partícula P_i . Estudiaremos ahora

brevemente el sistema de vectores aplicados $\left\{ \mathbf{P}_i, \vec{\mathbf{F}}_i \right\}$ con $i = 1, \dots, n$, al que llamaremos indistintamente *Sistema de Fuerzas Aplicadas* o *Distribución de Fuerzas*.¹⁰

Los conceptos vertidos anteriormente de sistemas de vectores, se trasladan directamente, por lo que se definen la resultante y el momento respecto a un punto Q a través de las ecuaciones 0.70 y 0.71:

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{F}}_i \quad (0.122)$$

$$\vec{\mathbf{M}}_Q = \sum_{i=1}^n (\mathbf{P}_i - \mathbf{Q}) \times \vec{\mathbf{F}}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{P}_i} - \vec{\mathbf{r}}_Q) \times \vec{\mathbf{F}}_i \quad (0.123)$$

y vale también la Fórmula de Cambio de Momentos, Ecuación 0.73:

$$\vec{\mathbf{M}}_S = \vec{\mathbf{M}}_Q + \vec{\mathbf{R}} \times (\vec{\mathbf{r}}_S - \vec{\mathbf{r}}_Q) \quad (0.124)$$

Dos sistemas de fuerzas que tengan las mismas coordenadas $\left(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{M}}_Q \right)$ respecto a un mismo punto Q cualquiera, serán equivalentes.

Esta propiedad será de gran importancia en nuestro curso porque nos permitirá introducir simplificaciones de materia fundamental (es decir, en las deducciones teóricas que realicemos) así como también simplificaciones en el momento de realizar cálculos específicos a los problemas planteados. Discutiremos ahora como la aplicaremos en diferentes partes del curso:

1) Consideremos dos sistemas de fuerzas $S^{(1)} = \left\{ \mathbf{P}_i, \vec{\mathbf{F}}_i \right\}$, con $i = 1, \dots, n$, de

coordenadas $\left(\vec{\mathbf{R}}^{(1)}, \vec{\mathbf{M}}_Q^{(1)} \right)$ respecto a un punto Q, y $S^{(2)} = \left\{ \mathbf{P}_j, \vec{\mathbf{F}}_{j+n} \right\}$ con $j =$

¹⁰ - Notar que la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_i$ no es necesariamente la fuerza total aplicada sobre la partícula \mathbf{P}_i , por lo que si hay más de una fuerza actuando sobre una misma partícula aparecerían como vectores aplicados diferentes.

$1, \dots, m$, de coordenadas nulas; es decir, las coordenadas respecto al punto Q $\left(\begin{matrix} \vec{\mathbf{R}}^{(2)} \\ \vec{\mathbf{M}}_Q^{(2)} \end{matrix} \right)$ serán:

$$\vec{\mathbf{R}}^{(2)} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{M}}_Q^{(2)} = \mathbf{0} \quad (0.125)$$

Por las propiedades de la suma de sistemas de vectores aplicados, ecuaciones 0.78 y 0.79, tendremos que el sistema suma $S^{(3)} = \left\{ \mathbf{P}_i, \vec{\mathbf{F}}_i \right\}$ con $i = 1, \dots, n + m$ verificará que:

$$\vec{\mathbf{R}}^{(3)} = \vec{\mathbf{R}}^{(1)} + \vec{\mathbf{R}}^{(2)} = \vec{\mathbf{R}}^{(1)} \quad (0.126)$$

y:

$$\vec{\mathbf{M}}_Q^{(3)} = \vec{\mathbf{M}}_Q^{(1)} + \vec{\mathbf{M}}_Q^{(2)} = \vec{\mathbf{M}}_Q^{(1)} \quad (0.127)$$

Como consecuencia de esto, tendremos que el sistema de fuerzas $S^{(3)} = S^{(1)} + S^{(2)}$, será equivalente al sistema $S^{(1)}$.

En otras palabras, cuando un determinado sistema de vectores aplicados, $S^{(3)}$, esté formado por dos subsistemas, $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$, teniendo uno de ellos, por ejemplo el $S^{(2)}$, resultante y momento nulo, el sistema total $S^{(3)}$ será equivalente a $S^{(1)}$; o sea, aquella parte del sistema de fuerzas cuyas coordenadas no son *necesariamente* idénticamente nulas¹¹. Observar que no todos los vectores del sistema $S^{(2)}$ tienen que ser nulos, ni tiene que ser un sistema nulo elemental, sino que sólo debe cumplir que sus coordenadas respecto a un punto particular sean nulas. Por la fórmula de cambio de momentos, Ecuación 0.73, lo serán respecto a cualquier punto.

Esta propiedad nos permitirá, en muchas oportunidades, eliminar una parte de un determinado sistema de fuerzas, que sabremos de antemano tiene coordenadas nulas, y trabajar solamente con el resto de las fuerzas. Efectivamente, cuando trabajemos

¹¹ - Aunque en algún caso particular sí pueden serlo, y el sistema total tendrá también coordenadas nulas. Es más, cuando estudiemos equilibrio de sistemas, en la segunda parte del curso, veremos que exigiremos, precisamente, que aquella parte de un sistema de fuerzas que no necesariamente tiene coordenadas nulas, las tenga para que el sistema pueda estar en equilibrio.

con sistemas de fuerzas actuando sobre sistemas de partículas, podremos clasificar las mismas en dos subgrupos:

- *Fuerzas Internas*: Son aquellas fuerzas que surgen de la interacción mutua entre las partículas del sistema.
- *Fuerzas Externas*: Son las debidas a la interacción del sistema con otras partículas o sistemas externos al que se considere.

Posteriormente veremos que uno de los principios de la dinámica nos permite demostrar que el sistema de fuerzas internas es de resultante y momento nulos; por lo que el sistema total de fuerzas será equivalente al sistema de fuerzas externas. Esto nos permitirá, en muchos casos, y en particular para sistemas rígidos, determinar completamente el movimiento del sistema estudiando solamente las fuerzas externas, independientemente de cuáles sean las interacciones internas del sistema. Dado que cuando trabajemos con sistemas de muchas partículas tendremos un gran desconocimiento sobre esta distribución de fuerzas internas, esta es una simplificación muy importante de nuestro trabajo.

- 2) Para un sistema cualquiera de fuerzas $S = \left\{ P_i, \vec{F}_i \right\}$, con $i = 1, \dots, n$,

consideremos que una cualquiera de las fuerzas del sistema, \vec{F}_j , aplicada en el punto P_j , se sustituye por una fuerza igual, pero aplicada en el punto P'_j ubicado sobre su

recta de acción $P_j \vec{F}_j$ (es decir, se desplaza dicha fuerza en su línea de acción), dejando el resto de las $n - 1$ fuerzas inalteradas. Tendremos así un sistema equivalente al original. Esto es debido a que el valor de la fuerza \vec{F}_j es el mismo

que originalmente, y por lo tanto su contribución a la resultante \vec{R} no cambia; y por lo demostrado en la sección 0.4.a.v, la contribución al momento total de los vectores

aplicados $\left\{ P_j, \vec{F}_j \right\}$ y $\left\{ P'_j, \vec{F}_j \right\}$ será la misma, por lo tanto el momento total \vec{M}_Q

tampoco cambiará.

Esto nos permite entonces, dado un sistema de fuerzas, desplazar una cualquiera de las fuerzas del sistema sobre su recta de acción sin alterar las coordenadas del sistema (resultante y momento).

- 3) Consideremos ahora que, dado un sistema de fuerzas $S^{(1)} = \left\{ \mathbf{P}_i, \vec{\mathbf{F}}_i \right\}$, con $i = 1, \dots, n$, sustituimos la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_j$, aplicada en el punto \mathbf{P}_j , por dos fuerzas aplicadas en el mismo punto, a las que llamaremos $\vec{\mathbf{F}}'_j$ y $\vec{\mathbf{F}}''_j = \vec{\mathbf{F}}_{n+1}$, tales que:

$$\vec{\mathbf{F}}_j = \vec{\mathbf{F}}'_j + \vec{\mathbf{F}}''_j = \vec{\mathbf{F}}'_j + \vec{\mathbf{F}}_{n+1} \quad (0.128)$$

Es decir, construimos un nuevo sistema $S^{(2)} = \left\{ \mathbf{P}'_k, \vec{\mathbf{F}}'_k \right\}$, con $k = 1, \dots, n+1$,

donde los vectores aplicados de los sistemas $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$ son iguales para todo $i = k$, salvo $k = j$ y $k = n + 1$; es decir:

$$\left\{ \mathbf{P}'_k, \vec{\mathbf{F}}'_k \right\} = \begin{cases} \left\{ \mathbf{P}_j, \vec{\mathbf{F}}'_j \right\} & \text{para } k = j \\ \left\{ \mathbf{P}_j, \vec{\mathbf{F}}''_j = \vec{\mathbf{F}}_{n+1} \right\} & \text{para } k = n + 1 \\ \left\{ \mathbf{P}_i, \vec{\mathbf{F}}_i \right\} & \text{para } k = i \neq j \end{cases} \quad (0.129)$$

Es inmediato demostrar que la resultante y el momento respecto a cualquier punto de ambos sistemas son iguales, por lo que, dado un sistema de fuerzas, podemos sustituir cualquiera por dos nuevas fuerzas aplicadas en el mismo punto, siempre y cuando la suma de estas dos últimas den la primera.

Esta propiedad, junto a la anterior, es de gran utilidad en el cálculo de momentos ya que podemos descomponer cualquier fuerza, según dos direcciones perpendiculares, cuyos momentos sean más fáciles de calcular. Obviamente que estas fuerzas podrán a su vez ser trasladadas según su línea de acción.

Ejemplo:

Consideremos ahora, como ejemplo un sistema de partículas $\{P_i\}$ con $i = 1, \dots, n$, de forma que la i -ésima partícula tiene masa m_i . Y consideremos un sistema de fuerzas $\{P_i, \vec{F}_i\}$ con $i = 1, \dots, n$, de forma que la fuerza actuando sobre la i -ésima partícula es proporcional a su masa: $\vec{F}_i = m_i \vec{f}$, donde \vec{f} es un vector constante, al que llamaremos *campo* \vec{f} .

La Resultante del sistemas de fuerzas aplicadas será:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{f} = M \vec{f} \quad (0.130)$$

o sea, la fuerza es igual a la masa total del sistema de partículas por el campo \vec{f} . El momento respecto a un punto cualquiera Q será:

$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{f} = \left[\sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \right] \times \vec{f} \quad (0.131)$$

utilizando la Ecuación 0.118 y la definición de baricentro, Ecuación 0.120, tenemos que el momento de este sistema de fuerzas en el baricentro es nulo:

$$\vec{M}_G = 0 \quad (0.132)$$

Por lo que, este sistema de fuerzas es equivalente, a una única fuerza $\vec{R} = M \vec{f}$ aplicado en el aricentro del sistema de partículas.

0.4.c.iii) Distribución de Velocidades de un Rígido.

Como veremos más adelante en el curso, el movimiento de un cuerpo rígido o de un sistema de referencia respecto a otro, queda determinado completamente dando la velocidad de un punto cualquiera del rígido, Q, que se mueva con velocidad \vec{v}_Q , y un vector velocidad angular $\vec{\omega}$, tal que la velocidad de cualquier punto del espacio, considerado como solidario al rígido o al sistema de referencia en cuestión es:

$$\vec{\mathbf{v}}_P = \vec{\mathbf{v}}_Q + \vec{\omega} \times (\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q) \quad (0.133)$$

Esto es lo que se llama *Distribución de Velocidades del Rígido*, y no se usa solamente para hallar la velocidad de un punto perteneciente a un rígido, sino que también nos dará la velocidad de arrastre de un punto respecto a un sistema de referencia en movimiento.

Esta relación es muy similar en su forma a la fórmula de cambio de momentos. Como vemos, la misma puede considerarse como un campo vectorial, de forma que a cada punto del espacio \mathbf{P} , le asocio una velocidad de acuerdo a esta fórmula. De esta forma tendré definida la velocidad de cualquier punto del espacio como punto del rígido, tenga el rígido una partícula con masa en dicho punto o no. El campo vectorial así generado, verifica la Ecuación 0.98, ya que:

$$\left(\vec{\mathbf{v}}_P - \vec{\mathbf{v}}_Q \right) \cdot \left(\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) = \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \right) \cdot \left(\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) = 0 \quad (0.134)$$

por lo que la distribución de velocidades del rígido, según el punto 6) de la Sección 0.4.b.viii puede verse como un campo de momentos. O sea, la velocidad angular $\vec{\omega}$, puede considerarse como la resultante de un sistema de vectores aplicados y las velocidades los momentos totales en el punto correspondiente de este sistema de vectores aplicados.

No entraremos en detalle, pero el sistema de vectores aplicados en cuestión son las velocidades angulares de giros elementales en torno a algún punto fijo.