CÁLCULO 3 - 2012
SOLUCIONES
PRIMER PARCIAL

3 DE MAYO DE 2012

(1) *Parametrizar la superficie del paraboloide*

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z = 1$$

Calcular el área de la superficie para $z \geq -2$.
En caso de necesitarlo recuerden que $\int \sin^2 t dt = \frac{1}{2}(t - \sin t \cos t)$

Una parametrización es $\varphi(\theta, z) = (2\sqrt{1-z}\cos\theta, 2\sqrt{1-z}\sin\theta, z)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ y $z \in (-\infty, 1]$.
Para calcular el área primero calculamos $\varphi_\theta \wedge \varphi_z$.

$$\varphi_\theta(\theta, z) = (-2\sqrt{1-z}\sin\theta, 2\sqrt{1-z}\cos\theta, 0)$$

$$\varphi_z(\theta, z) = (-\frac{1}{\sqrt{1-z}}\cos\theta, -\frac{1}{\sqrt{1-z}}\sin\theta, 1)$$

Entonces,

$$\varphi_\theta \wedge \varphi_z(\theta, z) = (2\sqrt{1-z}\cos\theta, 2\sqrt{1-z}\sin\theta, 2)$$

y su norma

$$||\varphi_\theta \wedge \varphi_z(\theta, z)|| = 2\sqrt{2-z}$$

Entonces el área de la superficie es

$$2\int_0^{2\pi}\int_{-2}^{1} \sqrt{2-z}\, dz\, d\theta = 4\pi(-\frac{2}{3}(2-z)^{\frac{3}{2}})|_{-2}^{1} = \frac{56}{3}\pi$$

(2) *El campo* $X(x, y, z) = (x\cos x + z, 1, -x\cos x)$ *¿tiene un potencial escalar? Si la respuesta es afirmativa, encontrarlo. Si es negativa, justificar.*

El rotor de X da

$$(0, \cos x - x\sin x + 1, 0)$$

como no es nulo tenemos que X no tiene potencial escalar.

(3) *Calcular el flujo del campo del ejercicio anterior, a través de la esfera de radio uno centrada en el origen.*

Consideramos una parametrización de la esfera

$$F(\varphi, \theta) = (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$$

con $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\varphi \in [0, \pi]$

$$F_\varphi \wedge F_\theta = (\cos\theta \sin^2\varphi, \sin\theta \sin^2\varphi, \cos\varphi \sin\varphi)$$

El flujo de X a través de la esfera unidad es

$$\iint_D X.F_\varphi \wedge F_\theta \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^3\varphi \cos(\cos\theta \sin\varphi) + \cos\theta \sin^2\varphi \cos\varphi + \sin\theta \sin^2\varphi + \cos\theta \cos\varphi \sin^2\varphi \cos(\cos\theta \sin\varphi) \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\cos\theta \sin\varphi + \cos\varphi) \cos\theta \sin^2\varphi \cos(\cos\theta \sin\varphi) \, d\theta \, d\varphi$$