Cálculo 3

Examen - 23 de junio de 2010.

N. de Examen	Apellido y Nombre	Cédula de Identidad

1. *a*) Sea $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo C^1. Enuncie condiciones suficientes para que X sea un campo de rotores, es decir para que exista un campo vectorial $Y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $rot(Y) = X$

   b) Sea el campo $X = (2yz, xy - e^z \cos(x), -xz)$, definido en todo $\mathbb{R}^3$. Probar que X es un campo de rotores.

   c) Hallar, si existe, $Y = (A, 0, C)$ potencial vector de X tal que $C(0, -1, z) = z$, $A(x, -1, z) = x^2 - xz$.

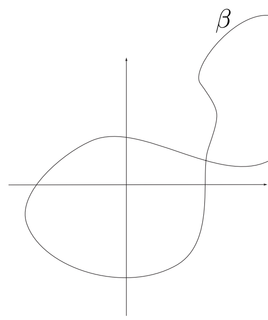
   d) Hallar el flujo de X en la superficie $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ |z| \leq 1/\sqrt{2}\}$, orientada con normal que NO apunte al eje z. Enunciar todos los teoremas que use.

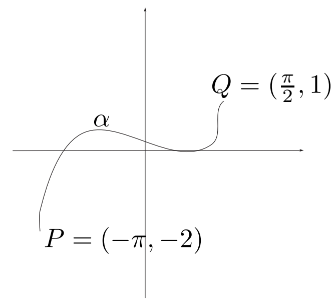
2. Sea $X : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo continuo, donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}^3$.

   a) Probar que si para todas las curvas suaves, α y β que verifican $\alpha, \beta : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ y $\alpha(0) = \beta(0)$ y $\alpha(1) = \beta(1)$ se cumple que
   $$\int_\alpha X = \int_\beta X$$
   entonces existe $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\nabla f = X$.

   b) Probar que si γ es una curva suave con extremo inicial P y extremo final Q y existe $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\nabla f = X$ entonces
   $$\int_\gamma X = f(Q) - f(P).$$
   Concluir que $\int_\alpha X = 0$ para toda curva cerrada simple α.

   c) Dado el campo $X(x, y) = (y(\cos(x) + 1), sen(x) + x)$. Hallar la circulación de X a lo largo de α y de β, siendo





3. a) Probar que si un campo vectorial $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ admite un potencial vector entonces el flujo de X a través de cualquier superficie suave cerrada es 0. Enunciar todos los teoremas que use.

   b) Se considera el campo $X : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$X(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$$

   deducir que X no admite un potencial vector. Contradice esto la parte a) del primer ejercicio? Explicar

4. Sea $S = \{(x,y,z)/x^2+y^2 = 1, z \in [0,2]\}$ con la normal $\vec{n}$ apuntando al eje z. Calcular $\iint_S X.\vec{n}$, siendo $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $X(x,y,z) = (sen(y)z^3 - x, y + e^{-zx}, z-2)$.